

L R I

R  
A  
P  
P  
O  
R  
T  
  
D  
E  
  
R  
E  
C  
H  
E  
R  
C  
H  
E

**UN PREMIER PAS VERS LA MODELISATION  
DES DONNEES SEMI-STRUCTUREES PAR LA  
LOGIQUE MULTI-MODALE HYBRIDE**

BIDOIT N / CERRITO S / THION V

Unité Mixte de Recherche 8623  
CNRS-Université Paris Sud-LRI

10/2003

**Rapport de Recherche N° 1375**

**CNRS – Université de Paris Sud**  
Centre d'Orsay  
**LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE**  
Bâtiment 650  
91405 ORSAY Cedex (France)



# Un premier pas vers la modélisation des données semi-structurées par la logique multi-modale hybride

Nicole Bidoit <sup>1</sup>    Serenella Cerrito <sup>2</sup>    Virginie Thion <sup>1</sup>

<sup>1</sup> LRI UMR CNRS 8623, Université Paris 11, Centre d'Orsay. {bidoit, thion}@lri.fr

<sup>2</sup> LaMI UMR CNRS 8042, Université d'Evry Val d'Essonne. {serena}@lami.univ-evry.fr

27 octobre 2003

## Résumé

Les documents XML et, de manière plus générale, les données semi-structurées, peuvent être représentées, dans une première approche, par des graphes étiquetés. Dans cet article, nous établissons un lien direct entre ces graphes de données et les modèles d'un langage de la logique multi-modale hybride. Ce lien est ensuite exploré dans deux directions.

Tout d'abord, nous nous intéressons à l'expression de contraintes d'intégrité sur des données semi-structurées en revisitant certaines classes de contraintes étudiées dans ce cadre dans la littérature.

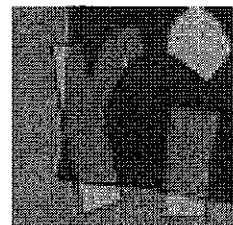
Puis nous abordons le problème de la définition d'un schéma pour les données semi-structurées. Notre approche conduit à définir un schéma sous forme d'une formule de la logique hybride, formule devant être satisfaite par les instances (graphes de données) du schéma.

La contribution de cet article se situe à deux niveaux :

1. la modélisation des données semi-structurées, des contraintes, et la définition de schéma dans un formalisme unique, celui de la logique multi-modale hybride ;
2. la généralisation de la notion de schéma (habituellement DTD), puisque dans ce travail nous considérons des schémas permettant de manipuler des références "bien typées".

Ce rapport technique apparaît également en tant que rapport de recherche du LaMI.

Rapport Technique  
LRI UMR CNRS 8623,  
Université Paris 11,  
Centre d'Orsay



---

## Sommaire

<b>1</b>	<b>La logique multi-modale hybride</b>	<b>4</b>
1.1	La logique multi-modale . . . . .	4
1.2	La logique multi-modale hybride . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Données semi-structurées et contraintes d'intégrité</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Données semi-structurées et schéma</b>	<b>10</b>
3.1	Schéma de données semi-structurées . . . . .	10
3.2	Schéma de données semi-structurées et logique multi-modale hybride . . . . .	16
<b>A</b>	<b>Preuve du théorème 1 (énoncé à la page 9)</b>	<b>24</b>
<b>B</b>	<b>Preuve du lemme 1 (énoncé à la page 17)</b>	<b>31</b>
<b>C</b>	<b>Preuve du théorème 3 (énoncé à la page 19)</b>	<b>36</b>

---

## Introduction

Dans la communauté des bases de données, l'intérêt pour les données dites *semi-structurées* est grandissant. L'origine historique de cette notion est liée à l'utilisation de plus en plus intensive de XML comme standard permettant la *publication de données*.

Un document XML peut en fait être vu comme un ensemble de données dont l'organisation est "plus flexible" que celle, par exemple, d'une base de données relationnelle ou objet. En quel sens "plus flexible" ? Tout d'abord, en absence d'une grammaire contraignant l'organisation des données "valides", par exemple en absence de DTD [Ray01], un document XML peut être vu comme une organisation logique de données qui ne respecte aucune contrainte fixée *à priori*. Même en présence d'une DTD, qui oblige les données dites "valides" à respecter certaines contraintes, on a quand même de larges marges de liberté, car, par exemple, la présence de l'opérateur ? dans une DTD permet la spécification d'éléments optionnels, la présence de la syntaxe ANY permet de ne pas contraindre du tout la structure d'un élément donné, des attributs d'éléments (au sens XML) peuvent être déclarés comme optionnels, etc.

Ceci a mené à une notion générale de *données semi-structurées*, qui va au delà de XML. On trouve dans la littérature sur les données semi-structurées plusieurs propositions de modélisations de cette notion [ABS00]. En général, une instance de bases de données semi-structurées est vue comme un graphe de données étiqueté. La figure 1 est un exemple classique de données semi-structurées représentant des articles et livres contenus dans une bibliothèque.

Or, il existe une famille de logiques, les logiques dites *modales*, dont la sémantique est définie par des graphes (sémantique de *Kripke*) ; ces logiques permettent donc d'exprimer de façon naturelle des propriétés de graphes. Dans ce travail, nous étudions le problème de la modélisation des données semi-structurées, et en particulier de la formalisation des contraintes et du schéma en utilisant une variante de logique modale dite *logique multi-modale hybride* [Bla00].

Nous proposons une modélisation des données semi-structurées et des contraintes sur celles-ci, ainsi qu'une définition de schéma dans un formalisme unique, celui de la logique multi-modale hybride. La notion de schéma que nous proposons est plus expressive que, par exemple, celle de DTD, car elle permet de "bien typer" la cible d'un lien de référence, chose qu'une DTD ne permet pas de faire.

Nous montrons le bien fondé de notre approche en établissant un certain nombre de propriétés de notre formalisation :

- Nous montrons que notre langage logique d'expression de contraintes est strictement plus expressif que le langage  $P$  étudié dans [BFW98].
- Nous montrons qu'un schéma  $\mathcal{G}$  de données peut être représenté fidèlement par une formule  $TRAD(\mathcal{G})$  de la logique multi-modale hybride, au sens où les instances de  $\mathcal{G}$  coïncident avec les modèles de  $TRAD(\mathcal{G})$ .

Le plan de l'article est le suivant : dans la première section, nous présentons la logique multi-modale hybride ; dans la deuxième section, nous montrons comment exprimer certaines contraintes d'intégrité avec la logique multi-modale hybride ; la section suivante est consacrée à définir et étudier toujours du point de vue de la logique multi-modale hybride une notion de schéma pour les données semi-structurées intégrant le typage de références ;

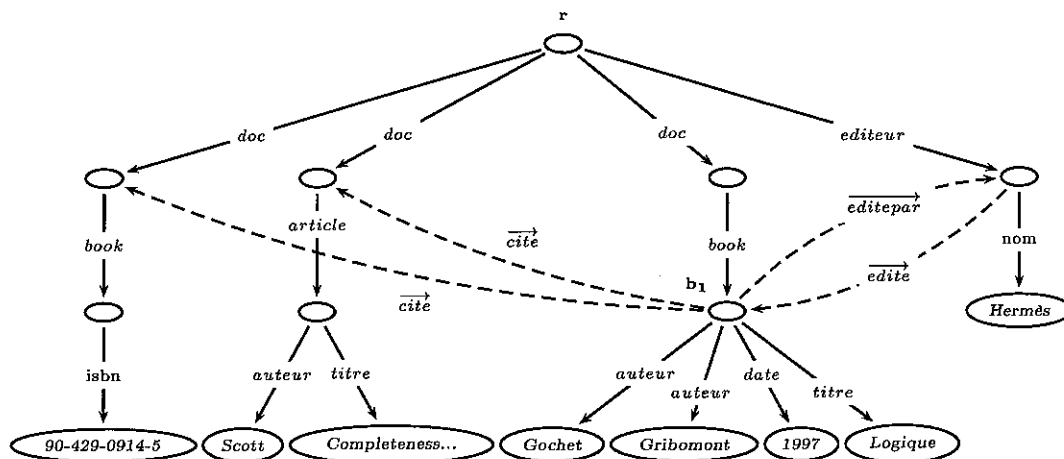


FIG. 1 – Représentation d'une base de données de bibliothèque

la conclusion de l'article expose quelques comparaisons avec d'autres travaux et quelques perspectives. Des annexes contenant des preuves détaillées complètent le rapport.

## 1 La logique multi-modale hybride

Dans la suite, nous travaillons dans le cadre propositionnel. Nous présentons d'abord la logique multi-modale (la logique multi-modale hybride en est une extension).

### 1.1 La logique multi-modale

L'alphabet de la logique multi-modale est constitué de :

- un ensemble de symboles propositionnels  $PROP$  notés  $p, q, \dots$ ,
- le connecteur logique binaire  $\wedge$ ,
- l'opérateur logique unaire  $\neg$ ,
- un ensemble fini d'étiquettes  $\mathcal{E}$ ,
- les opérateurs modaux  $[e]$  où  $e$  est une étiquette.

Les formules bien formées FBF de la logique multi-modale sont définies par :

$$\text{FBF} := p \mid \neg\psi \mid \psi_1 \wedge \psi_2 \mid [e]\psi$$

où  $\psi, \psi_1$  et  $\psi_2$  sont des formules bien formées et  $p \in PROP$ .

Un modèle fini  $\mathfrak{M}$  de la logique multi-modale est un quadruplet  $(S, s_0, R, V)$  tel que

- $S$  est un ensemble fini d'états contenant l'état  $s_0$  ;
- $R = \{r_e \mid \forall e \in E, r_e \subseteq E \times E\}$  est un ensemble de relations binaires sur  $S$ , dites *relations d'accessibilité* ( $R$  contient exactement une relation  $r_e$  pour chaque étiquette  $e$ ) ;
- $V$  est une fonction  $PROP \rightarrow Pow(S)$ , qui assigne à chaque proposition  $p$ , l'ensemble des états dans lesquels  $p$  est satisfaite.

Il est ici immédiat de voir qu'un modèle de la logique multi-modale est un graphe orienté, étiqueté sur les arcs : les sommets du graphe sont les états du modèle et chaque relation  $r_e$  de  $R$  définit les arcs du graphe et leur étiquetage. Or, classiquement, les données semi-structurées sont représentées par un graphe orienté et étiqueté, et parfois même de façon plus restreinte par un arbre étiqueté. Il paraît donc naturel de faire la correspondance entre modèles de la logique multi-modale et données semi-structurées. Ce lien a d'ailleurs déjà été exploré par [ADdR01].

**Exemple 1** La figure 1 représente à la fois un exemple classique de données semi-structurées et un modèle de la logique multi-modale. En effet, on peut considérer que

- le sommet  $r$  correspond à l'état  $s_0$ ,
- l'ensemble des sommets du graphe de données correspond à l'ensemble des états  $S$ ,
- à chaque étiquette  $e$  du graphe correspond une relation binaire  $r_e$  de  $R = \{r_{doc}, r_{éditeur}, r_{book}, r_{cité}, \dots\}$ . Chaque arc d'origine  $s_1$ , de destination  $s_2$  et étiqueté par  $e$  dans le graphe de données correspond à un couple  $(s_1, s_2)$  dans la relation  $r_e$ .
- les valeurs “étiquetant” les feuilles correspondent aux propositions du langage et par exemple la présence de Scott “sur” la 2<sup>ème</sup> feuille  $f$  à partir de la gauche correspond dans le modèle à  $f \in V(\text{Scott})$ ; il convient de prendre garde ici à ne pas confondre les noms ( $r$  et  $b_1$ ) donnés à certains sommets pour les besoins de la présentation, avec des propositions. Il est d'ailleurs à noter que si  $\mathfrak{M}$  correspond à des données semi-structurées alors la fonction  $V$  de  $\mathfrak{M}$  associe à chaque proposition  $p$  des états “feuilles” du graphe (i.e. sommets de degré sortant nul).

Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle,  $s$  un état et  $\psi$  une formule bien formée.  $\mathfrak{M}$  satisfait  $\psi$  à l'état  $s$ , noté  $\mathfrak{M}, s \models_{mm} \psi$ , est défini par induction sur  $\psi$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, s \models_{mm} p & \quad \text{ssi } s \in V(p), \quad \text{où } p \in PROP \\ \mathfrak{M}, s \models_{mm} \psi_1 \wedge \psi_2 & \quad \text{ssi } \mathfrak{M}, s \models_{mm} \psi_1 \text{ et } \mathfrak{M}, s \models_{mm} \psi_2 \\ \mathfrak{M}, s \models_{mm} \neg\psi & \quad \text{ssi } \mathfrak{M}, s \not\models_{mm} \psi \\ \mathfrak{M}, s \models_{mm} [e]\psi & \quad \text{ssi pour tout } s' \in S, (s, s') \in r_e \text{ implique } \mathfrak{M}, s' \models_{mm} \psi \end{aligned}$$

**Exemple 1 (suite)** Pour le modèle de la figure 1, la formule  $[auteur]\neg\text{Scott}$  évaluée en  $b_1$  est satisfaite car aucun des états accessibles de  $b_1$  par un arc étiqueté par *auteur* ne satisfait *Scott*. Pour le même modèle, la formule  $[éditeur][nom]\text{Hermès}$  évaluée à la racine  $r$  est satisfaite.

Dans la suite, nous utilisons de façon classique les opérateurs  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  et  $\langle e \rangle$  définis par :  $\psi_1 \vee \psi_2 =_{def} \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$ ,  $\psi_1 \Rightarrow \psi_2 =_{def} \neg\psi_1 \vee \psi_2$  et  $\langle e \rangle\psi =_{def} \neg[e]\neg\psi$ . Nous utilisons aussi le symbole  $\top$  pour désigner une tautologie.

**Exemple 1 (suite)** Pour le modèle de la figure 1, la formule  $\langle titre \rangle\top$  évaluée en  $b_1$  est satisfaite car il existe un successeur de  $b_1$  accessible par un arc étiqueté par *titre*. Sur le même principe, la formule  $[doc](\langle book \rangle\top \vee \langle article \rangle\top)$  évaluée à la racine est satisfaite dans ce modèle.

Le langage peut aussi être étendu avec l'opérateur  $G$  dont la sémantique est :  $\mathfrak{M}, s \models_{mm} G\psi$  ssi quelque soit  $s' \in S$  tel que  $(s, s') \in R^+$  on a  $\mathfrak{M}, s' \models_{mm} \psi$  où  $R^+$  est la fermeture transitive de la relation  $R = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} r_e$ .

De la même manière que  $\langle e \rangle$  a été défini à partir de  $[e]$ , l'opérateur  $F$  est défini à partir de  $G$  par  $F\psi =_{def} \neg G\neg\psi$ . La formule  $F\psi$  exprime la propriété “il existe un état, accessible à partir de l'état courant par un chemin de longueur quelconque, tel que  $\psi$ ”. Et, de façon duale, la formule  $G\psi$  exprime la propriété “pour tous les états accessibles à partir de l'état courant par un chemin de longueur quelconque,  $\psi$  est vérifiée”.

**Exemple 1 (suite)** Toujours en se référant à la figure 1, la formule  $F\text{Scott}$  évaluée en la racine  $r$  est satisfaite car un état accessible de la racine vérifie *Scott*. Par contre, la formule  $G[\overrightarrow{cité}]\langle book \rangle\top$  évaluée en la racine  $r$  n'est pas satisfaite car  $b_1$  est un état accessible de la racine pour lequel  $[\overrightarrow{cité}]\langle book \rangle\top$  n'est pas satisfaite.

A ce point de la présentation, le lecteur peut entrevoir la possibilité d'utiliser la logique multi-modale pour exprimer des contraintes d'intégrité sur des données semi-structurées. Par exemple, la contrainte "tout article a au moins un auteur" s'exprime par la formule  $[doc][article]\langle auteur \rangle \top$ .

Toutefois, il apparaît que l'expressivité de la logique multi-modale est insuffisante pour exprimer certaines propriétés intéressantes telles que les contraintes introduites dans [BFW98] et que nous étudierons dans la section 2. Cette remarque nous amène à présenter une extension de la logique multi-modale appelée logique multi-modale hybride.

## 1.2 La logique multi-modale hybride

Afin de motiver l'introduction de la logique modale hybride, nous allons reprendre ici à notre compte les arguments de [Bla00]. La logique modale est un formalisme simple pour travailler/manipuler des structures relationnelles telles que des graphes. Toutefois, la logique modale n'offre pas de mécanismes permettant de faire référence à des sommets particuliers d'un graphe. Ceci restreint le pouvoir de représentation et de raisonnement de la logique modale. Ainsi les logiques hybrides [ABM99], dans leur forme les plus simples, sont des extensions des logiques modales permettant justement de faire référence explicitement aux sommets des structures sous jacentes i.e. des graphes. L'objet de cet article n'étant pas de présenter les logiques modales hybrides, nous proposons au lecteur intéressé un ensemble d'articles sur le sujet, disponibles sur le site <http://www.hylo.net>, parmi lesquels certains montrent que les logiques modales hybrides "subsument" les logiques de description, la logique terminologique (*feature logic*), la logique temporelle...

Le langage de la logique hybride permet donc de nommer les états et d'exprimer qu'une formule doit être satisfaite dans un état nommé. La logique hybride introduit pour ce faire quatre outils fondamentaux :

**les nominaux** sont des symboles propositionnels (donc des formules) spéciaux : chaque nominal "est vrai" dans un et un seul état du modèle. Un nominal "nomme" l'unique état dans lequel il est vrai ;

**les variables d'état** sont aussi des formules qui permettent de désigner un état ;

**les opérateurs de satisfaction** sont de la forme  $@_u$  où  $u$  est une variable d'état ou un nominal. Une formule de la forme  $@_u \psi$ , où  $\psi$  est une formule, signifie que  $\psi$  doit être satisfaite à l'état désigné ou nommé par  $u$  ;

**l'opérateur "bind"  $\downarrow$**  : une formule de la forme  $\downarrow x \psi$ , où  $x$  est une variable d'état et  $\psi$  est une formule, lie toutes les occurrences de  $x$  dans  $\psi$  à l'état courant de l'évaluation.

L'alphabet de la logique multi-modale hybride étend l'alphabet de la logique multi-modale par :

- un ensemble de nominaux  $NOM = \{a, b, \dots\}$
  - un ensemble de variables d'états  $SVAR = \{x, y, z, \dots\}$
  - l'opérateur  $\downarrow x$  où  $x$  est une variable d'état
  - les opérateurs  $@_u$  où  $u$  est une variable d'état ou un nominal
- avec  $PROP$ ,  $NOM$  et  $SVAR$  disjoints deux à deux.

Les formules bien formées FBF de cette logique sont définies par :

FBF :  $:= p \mid \top \mid \neg \psi \mid \psi_1 \vee \psi_2 \mid \psi_1 \wedge \psi_2 \mid [e]\psi \mid \langle e \rangle \psi \mid G\psi \mid F\psi \mid u \mid \downarrow x \psi \mid @_u \psi$



où  $\psi$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des formules bien formées,  $p \in PROP$ ,  $x \in SVAR$  et  $u \in NOM \cup SVAR$ .

Voici, intuitivement, la signification des opérateurs hybrides  $@_u$  et  $\downarrow$  :  $@_u\psi$  signifie “aller à l’état nommé (ou désigné) par  $u$  (qui est l’unique état où  $u$  est vrai)”, et évaluer  $\psi$  en  $u$ .”  $\downarrow x \psi$  signifie “ $x$  désigne maintenant l’état courant dans  $\psi$ ”.

**Exemple 1 (suite)** Avant de donner formellement la sémantique des opérateurs de la logique multi-modale hybride, nous proposons ici quelques exemples intuitifs. Nous continuons l’exemple 1 en ajoutant à notre langage le nominal *root*.

La formule  $\downarrow x \langle \overrightarrow{editepar} \rangle \langle \overrightarrow{edite} \rangle x$  évaluée en  $b_1$  est satisfaite car, de  $b_1$ , il existe un état accessible par un arc étiqueté par  $\overrightarrow{editepar}$  pour lequel il existe un arc sortant étiqueté par  $\overrightarrow{edite}$  et revenant en  $b_1$ . Dans cet exemple, nous remarquons l’utilisation du binder “ $\downarrow x \dots$ ” pour assigner à la variable d’état  $x$  l’état courant de l’évaluation, en l’occurrence l’état  $b_1$ . Nous attirons l’attention du lecteur sur l’utilisation de cette variable en tant que formule dans “ $\dots \langle \overrightarrow{edite} \rangle x$ ”.

La formule  $@_{root}[doc][article]\langle \overrightarrow{auteur} \rangle \top$  évaluée en  $b_1$  est également satisfaite, à condition bien sûr que le nominal *root* nomme la racine  $r$  du graphe de données.

Il est nécessaire maintenant d’enrichir légèrement la notion de modèle modal pour intégrer l’introduction des nominaux, des variables d’états, des formules de satisfaction et de “binding”.

Une structure  $\mathfrak{M}=(S, s_0, R, V, I_{nom})$  est un modèle de la logique multi-modale hybride si

- $(S, s_0, R, V)$  est un modèle de la logique multi-modale, et
- $I_{nom}$  est une fonction  $NOM \rightarrow S$  qui assigne un état à chaque nominal.

Une valuation est une fonction  $g : SVAR \rightarrow S$  qui assigne un état à chaque variable d’état. La notation  $g \overset{x}{\sim} g'$  ( $g'$  est une  $x$ -variante de  $g$ ) signifie que  $g'$  et  $g$  sont des valuations (pour un modèle  $\mathfrak{M}$ ) telles que  $g'$  est identique à  $g$  sauf éventuellement pour l’argument  $x$ .

Nous sommes donc prêts à donner la sémantique des formules “hybrides”.

$\mathfrak{M}$  satisfait  $\psi$  à l’état  $s$  respectivement à une valuation  $g$ , noté  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi$ , est défini par induction sur  $\psi$  comme suit (nous ne définissons ici que la sémantique des formules “hybrides”) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, g, s \models_{hm} a & \quad \text{ssi } I_{nom}(a) = s, \quad \text{où } a \in NOM \\ \mathfrak{M}, g, s \models_{hm} x & \quad \text{ssi } g(x) = s, \quad \text{où } x \in SVAR \\ \mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \downarrow x \psi & \quad \text{ssi } \mathfrak{M}, g', s \models_{hm} \psi \text{ avec } g \overset{x}{\sim} g' \text{ et } g'(x) = s, \quad \text{où } x \in SVAR \\ \mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_x \psi & \quad \text{ssi } \mathfrak{M}, g, g(x) \models_{hm} \psi \text{ où } x \in SVAR \\ \mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_a \psi & \quad \text{ssi } \mathfrak{M}, g, I_{nom}(a) \models_{hm} \psi \text{ où } a \in NOM \end{aligned}$$

Dans la suite, nous avons besoin des notions sémantiques suivantes :

- $\mathfrak{M}$  satisfait globalement  $\psi$  respectivement à une valuation  $g$ , noté  $\mathfrak{M}, g \models_{hm} \psi$ , ssi pour tout état  $s \in S$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi$  ;
- $\mathfrak{M}$  satisfait globalement  $\psi$ , noté  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi$ , ssi pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}, g \models_{hm} \psi$ .

**Exemple 1 (suite)** Nous avons déjà remarqué que le graphe de données de la figure 1 peut être vu comme un modèle de la logique multi-modale. Il est facile de le voir comme un modèle de la logique multi-modale hybride en choisissant l’ensemble  $NOM$  des nominaux

du langage comme étant le singleton  $\{root\}$ , interprété par  $r$  i.e.  $I_{nom}(root) = r$ .

[BT99] exhibe un certain nombre de formules hybrides dites pures (ne contenant pas de symbole propositionnel) dont l'intérêt est d'exprimer des contraintes de structure sur le graphe d'un modèle. Par exemple :

- la réflexivité de la relation d'accessibilité  $r_e$  peut s'exprimer soit par  $\mathfrak{M} \models_{hm} \downarrow x \langle e \rangle x$  soit par  $\mathfrak{M} \models_{hm} @_x \langle e \rangle x$ ,
- il est possible d'exprimer que tous les états de  $S$  sont accessibles à partir de  $root$  par  $\mathfrak{M} \models_{hm} \downarrow x @_{root} Fx$ .

## 2 Données semi-structurées et contraintes d'intégrité

Partant du principe que les données semi-structurées sont représentées par un graphe étiqueté enraciné, et sachant que cette structure peut être vue comme un modèle de la logique multi-modale hybride, il est possible d'exprimer une contrainte d'intégrité sur ces données sous la forme d'une formule de cette logique.

Des contraintes sur les données semi-structurées sont souvent exprimées en termes de navigation dans le graphe de données, c'est-à-dire sous la forme de propriétés des chemins du graphe : ces contraintes ont été étudiées, entre autre, dans [AV97, BFW98, ADdR01, CGL99, CGL98, DT01, CLM02].

Nous nous intéressons ici aux contraintes étudiées dans [BFW98], formalisées par un sous-langage de la logique classique du premier ordre appelé  $P$  ; cette classe de contraintes est une généralisation naturelle des contraintes de [AV97].

Dans cette section, nous présentons tout d'abord le langage  $P$ . Nous donnons ensuite quelques contraintes exprimables dans  $P$  et proposons de les exprimer par une formule de la logique multi-modale hybride. Puis nous établissons un résultat d'expressivité, à savoir que la logique multi-modale hybride est plus expressive que  $P$ .

Considérons un ensemble d'étiquettes  $E$  (représentant les étiquettes des arcs des modèles de données considérés). Soit l'ensemble  $R$  de relations binaires défini par  $R = \{r_e \mid \forall e \in E, r_e \subseteq E \times E\}$

Un chemin peut être représenté par une formule de la logique du premier ordre à deux variables libres.

**Définition 1 (Chemin du langage  $P$ )** *Un chemin du langage  $P$  est une formule  $\alpha(x, y)$  de l'une des formes suivantes :*

- $x = y$ , écrit  $\varepsilon(x, y)$  et appelé chemin vide,
- $R_e(x, y)$ , où  $R_e \in R$ ,
- $\exists z (R_e(x, z) \wedge \beta(z, y))$ , où  $R_e \in R$  et  $\beta(z, y)$  un chemin.

Soit  $root$  une constante. Une formule de  $P$  est une formule soit de la forme  $\forall xy (\alpha(root, x) \wedge \beta(x, y) \Rightarrow \gamma(x, y))$  soit de la forme  $\forall xy (\alpha(root, x) \wedge \beta(x, y) \Rightarrow \gamma(y, x))$  où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des chemins. Appelons *contraintes de chemin*, les contraintes exprimées par une formule de  $P$ .

Dans la suite, les exemples se réfèrent aux données représentées par la figure 1. Un exemple de contrainte de chemin est "Tout document cité par un livre est un document accessible par un lien *doc* à partir de la racine de la base", exprimable dans  $P$  par la formule (1)

$$\forall x (\exists y (r_{doc}(root, y) \wedge (\exists z (r_{book}(y, z) \wedge r_{cite}(z, x)))) \Rightarrow r_{doc}(root, x))$$

Ce type de contrainte est appelé *extent constraint* dans [BFW98].

Un autre type de contrainte de chemin sont les contraintes dites *inverse constraints*. Ces contraintes stipulent que si  $y$  est accessible de  $x$  par un chemin  $\alpha$  alors  $x$  est accessible de  $y$  par un chemin  $\beta$  (i.e.  $\beta$  est l'inverse de  $\alpha$ ). Un exemple est la contrainte “pour tout  $x$ , si  $x$  est édité par  $y$  alors  $y$  édite  $x$ ”, exprimable dans  $P$  par la formule (2)

$$\forall xy(\exists z(r_{doc}(root, z) \wedge r_{book}(z, x)) \wedge r_{\overrightarrow{editepar}}(x, y) \Rightarrow r_{\overrightarrow{edite}}(y, x))$$

Ces contraintes sont exprimables par des formules de la logique multi-modale hybride. Par exemple, (1) peut se traduire par

$$@_{root}[doc][book][\overrightarrow{cite}]\downarrow x (@_r\langle doc \rangle x)$$

et (2) peut se traduire par

$$@_{root}[doc][book]\downarrow x ([\overrightarrow{editepar}]\langle \overrightarrow{edite} \rangle x)$$

Soit  $\mathcal{H}$  le sous langage de la logique multi-modale hybride ne contenant pas les opérateurs  $F$  et  $G$ . En général, toute formule de  $P$  a une traduction  $T_P$  dans  $\mathcal{H}$ . Nous prouvons que :

**Théorème 1** Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle de logique multi-modale hybride et  $\mathcal{I}$  l'interprétation du premier ordre correspondante<sup>1</sup>. Il existe une traduction  $T_P$  des formules de  $P$ , dans le fragment  $\mathcal{H}$  de la logique multi-modale hybride, telle que pour toute formule  $C$  de  $P$ , on a :

$$\mathcal{I} \models_{fo} C \text{ ssi } \mathfrak{M} \models_{hm} T_P(C)$$

La preuve détaillée de ce théorème se trouve en annexe A.

Ce résultat montre que la logique multi-modale hybride est au moins aussi expressive que  $P$ . Cette propriété peut être aussi déduite à partir du résultat [ABM99] qui dit que  $\mathcal{H}$  a exactement le même pouvoir expressif que le fragment de la logique du premier ordre dit “borné”, qui inclue  $P$ .

On remarque aussi que certaines contraintes ne sont pas exprimables dans  $P$ , par exemple : un livre a exactement un numéro isbn. Par contre, cette contrainte est facilement exprimable par une formule de  $\mathcal{H}$  par :

$$@_{root}[doc][book]\downarrow x ((isbn)\downarrow y (@_x[isbn]y))$$

De plus, il est bien connu qu'aucune contrainte faisant référence à la fermeture transitive d'une relation n'est exprimable dans la logique du premier ordre. Ainsi, par exemple, la contrainte “Dans la base, on trouve un document écrit par Scott” (en sachant que les documents peuvent apparaître à plusieurs niveaux du graphe de données) n'est pas exprimable dans  $P$ . Par contre, cette contrainte est exprimée par la formule  $\langle auteur \rangle Scott \vee (F\langle auteur \rangle Scott)$  du langage de la logique multi-modale hybride. Ceci montre que :

**Théorème 2** La logique multi-modale hybride est strictement plus expressive que  $P$ .

<sup>1</sup>Nous ne détaillons la correspondance entre  $\mathfrak{M}$  et  $\mathcal{I}$  : essentiellement les relations d'accessibilité sont traduites par des prédicats binaires et leur interprétation.

Le problème de l'implication pour  $P$  étant indécidable, les auteurs de [BFW98] étudient ensuite des restrictions de  $P$  pour lesquelles ce problème est décidable. Selon le même principe, puisque le problème de l'implication pour la logique multi-modale hybride a été prouvé indécidable, il conviendrait d'exhiber des sous-langages de la logique multi-modale hybride pour lesquels ce problème serait décidable. Par exemple, puisque c'est la présence de l'opérateur  $\downarrow$  qui rend  $\mathcal{H}$  indécidable [ABM99], il serait intéressant d'étudier le fragment de la logique multi-modale hybride contenant  $F$  et  $G$  mais ne contenant pas  $\downarrow$ . Ceci fera l'objet d'un futur travail.

### 3 Données semi-structurées et schéma

L'objectif de cette section est d'étudier la notion de schéma de données semi-structurées. Dans un premier temps, nous proposons une notion de schéma plus générale que celles rencontrées dans la littérature standard sur XML et en particulier plus générale que la notion de DTD [Ray01]. L'apport essentiel de notre notion de schéma est la gestion de références garantissant un bon "typage" des données référencées. L'outil utilisé pour définir un schéma est une extension des techniques usuellement exploitées et est développé sous la forme d'une grammaire de graphe très simple. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la spécification d'un schéma par une formule de la logique multi-modale hybride et donc nous nous attaquons au problème classique suivant : étant donné un schéma  $\mathcal{G}$ , et un graphe  $\mathcal{M}$  de données semi-structurées, existe-t-il une formule  $\psi$  de la logique multi-modale hybride telle que  $\mathcal{M}$  est une instance du schéma  $\mathcal{G}$  si et seulement si  $\mathcal{M}$  satisfait la formule  $\psi$  ?

#### 3.1 Schéma de données semi-structurées

Un schéma étant une grammaire particulière, nous définissons ici ce que nous entendons par *grammaire*. Pour cela, nous définissons la notion de *motif* puis celle de *règle*. Pour ce faire, nous considérons dans la suite :

- un ensemble fini  $\mathcal{V}$  de symboles dits *non terminaux* contenant au moins le symbole *Root* ;
- un ensemble fini d'étiquettes  $\mathcal{E}$  disjoint de  $\mathcal{V}$  et partitionné en deux sous-ensembles  $E$  et  $\vec{E}$ . Les étiquettes de  $\vec{E}$  sont appelées *références* ;
- un symbole spécial  $\Lambda$ .

Par convention, un symbole non terminal commence par une lettre majuscule, et une étiquette par une lettre minuscule. Les références sont surlignées par le symbole  $\rightarrow$ . La première notion nécessaire à la définition d'une grammaire de motifs est celle de motif :

**Définition 2 (Motif)** Un *motif expr* est une expression de l'une des formes suivantes :

1.  $\Lambda$  ; on dit alors que *expr* est le *motif vide* ;
2.  $(e N)^{op}$  tel que  $e \in \mathcal{E}$ ,  $N \in \mathcal{V}$  et  $op \in \{*, +, !, ?\}$  ; on dit alors que *expr* est un *motif élémentaire* ;
3.  $m_1, \dots, m_k$  tel que pour tout  $j \in [1..k]$ ,  $m_j$  est un motif élémentaire ; on dit alors que *expr* est un *motif conjonctif* ;
4.  $m_1 \mid \dots \mid m_k$  tel que pour tout  $j \in [1..k]$ ,  $m_j$  est un motif conjonctif ; on dit alors que *expr* est un *motif disjonctif* ;

**Exemple 2** Soit un ensemble d'étiquettes  $\mathcal{E}_1 = E_1 \cup \vec{E}_1$  où :  
 $E_1 = \{doc, editeur, nom, article, book, auteur, titre, date, isbn\}$ , et

$$\vec{E}1 = \{\overrightarrow{edite}, \overrightarrow{cite}, \overrightarrow{editepar}\}$$

Soit un ensemble  $\mathcal{V}1 = \{Root, Editeur, Doc, Art, Book, Nom, Dat, Isb\}$  de symboles non terminaux.

Voici quelques exemples de motifs :

1.  $(doc\ Doc)^*$  est un motif élémentaire qui va servir à exprimer, lorsqu'il "filtre" un graphe en un état  $s$ , que zéro ou plusieurs arcs étiquetés par  $doc$  doivent sortir de cet état  $s$ .  
Les motifs  $(doc\ Doc)^+$ ,  $(doc\ Doc)^1$  et  $(doc\ Doc)^?$  sont des variantes du motif  $(doc\ Doc)^*$  qui permettent d'exprimer des contraintes de cardinalité sur le nombre d'arcs sortant de  $s$  (au moins 1, exactement 1, zéro ou 1).
2.  $(auteur\ Nom)^+$ ,  $(date\ Dat)^1$ ,  $(\overrightarrow{cite}\ Doc)^*$  est un motif conjonctif et sert à exprimer qu'au moins un arc étiqueté par  $auteur$ , exactement un arc étiqueté par  $date$  et éventuellement des arcs étiquetés par la référence  $\overrightarrow{cite}$  doivent sortir de l'état  $s$ .
3.  $(article\ Art)^1 \mid (book\ Book)^1$  est un motif disjonctif et permet d'exprimer qu'ou bien exactement un arc étiqueté par  $article$  ou bien exactement un arc étiqueté par  $book$  doit sortir de l'état  $s$ .
4.  $((auteur\ Nom)^+ \mid (isbn\ Isb)^1), (\overrightarrow{cite}\ Doc)^*$  n'est pas un motif valide mais ce qu'il exprime (potentiellement) peut être formulé par  $(auteur\ Nom)^+, (\overrightarrow{cite}\ Doc)^* \mid (isbn\ Isb)^1, (\overrightarrow{cite}\ Doc)^*$ .

Une grammaire de motifs va être définie de façon classique comme un ensemble de règles qui sont définies par :

**Définition 3 (Règle)** Une règle est une expression de la forme  $N ::= expr$  où  $N$  est un symbole non terminal et  $expr$  est un motif.

**Exemple 2 (suite)** Voici un ensemble de règles dont certaines utilisent les motifs présentés dans l'exemple 2 :

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ \begin{array}{l} Root \quad ::= \quad (doc\ Doc)^*, (editeur\ Editeur)^* \\ Editeur \quad ::= \quad (nom\ Nom)^1, (\overrightarrow{edite}\ Book)^* \\ Doc \quad ::= \quad (article\ Art)^1 \mid (book\ Book)^1 \\ Art \quad ::= \quad (auteur\ Nom)^+, (titre\ Nom)^1, (date\ Dat)^?, (\overrightarrow{cite}\ Doc)^* \\ Book \quad ::= \quad (isbn\ Isb)^1, (\overrightarrow{cite}\ Doc)^* \mid (auteur\ Nom)^+, (date\ Dat)^1, \\ \quad \quad \quad (titre\ Nom)^1, (\overrightarrow{cite}\ Doc)^*, (\overrightarrow{editepar}\ Editeur)^1 \\ Nom \quad ::= \quad \Lambda \quad Dat ::= \Lambda \quad Isb ::= \Lambda \end{array} \right\}$$

Une grammaire de motifs est, comme annoncé, un ensemble de règles, sous certaines conditions que voici :

**Définition 4 (Grammaire de motifs)**

Une *grammaire de motifs*  $\mathcal{G}$  est un quadruplet  $(\mathcal{V}, Root, \mathcal{E}, \mathcal{R})$  où

- i)  $\mathcal{R}$  est un ensemble fini de règles constitué d'une et une seule règle pour chaque symbole non terminal de  $\mathcal{V}$ ;
- ii) pour tout couple de motif élémentaires  $(e_1\ N_1)^{op_1}$  et  $(e_2\ N_2)^{op_2}$  ayant une occurrence dans  $\mathcal{R}$ ,  $e_1 = e_2$  implique  $N_1 = N_2$  ;

<sup>2</sup>Ici  $e_1$  et  $e_2$  sont des étiquettes ou des références.

iii) il n'existe pas dans  $\mathcal{R}$  de motif élémentaire  $(e \text{ Root})^{op}$  ( $e$  et  $op$  quelconques) et  $\text{Root}$  est le symbole d'entrée de la grammaire.

**Exemple 2 (suite)** L'ensemble  $\mathcal{R}_1$  de règles constitue, avec l'ensemble de symboles non terminaux  $\mathcal{V}_1$  et l'ensemble d'étiquettes  $\mathcal{E} = E_1 \cup \vec{E}_1$ , une grammaire de motifs  $(\mathcal{V}_1, \text{Root}, \mathcal{E}_1, \mathcal{R}_1)$  appelée  $\mathcal{G}_1$  dans la suite. Remarquez qu'il existe bien une règle associée à chaque symbole de  $\mathcal{V}_1$ . Notez que l'étiquette  $\text{date}$  est utilisée dans deux motifs ayant des opérateurs de cardinalité différents :  $(\text{date } \text{Dat})^!$  et  $(\text{date } \text{Dat})^?$ . Notez également que différentes étiquettes sont associées à un même symbole non terminal, par exemple,  $(\text{auteur } \text{Nom})^+$  et  $(\text{titre } \text{Nom})^!$ .

Si la règle associée à  $\text{Art}$  était  $\text{Art} ::= (\text{titre } \text{Nom})^!, (\overrightarrow{\text{cite}} \text{Book})^*$  alors  $\mathcal{R}_1$  contiendrait à la fois un motif  $(\overrightarrow{\text{cite}} \text{Book})^*$  dans la règle de  $\text{Art}$  et un motif  $(\overrightarrow{\text{cite}} \text{Doc})^*$  dans la règle de  $\text{Book}$ , ce qui n'est pas autorisé par la condition (ii) de la définition de grammaire de motifs (définition 4).

De façon plus générale, notez que le fait d'interdire la présence de deux règles  $N ::= \text{expr}_1$  et  $N ::= \text{expr}_2$  ayant même partie gauche dans une grammaire n'est pas restrictif car ces deux règles peuvent être exprimées par l'unique règle  $N ::= \text{expr}_1 \mid \text{expr}_2$ .

**Notations :** Etant donné  $e \in \mathcal{E}$ ,  $\text{Symb}(e)$  est l'unique symbole non terminal  $N \in \mathcal{V}$  tel que  $(e \text{ N})^{op}$  ( $op$  quelconque) est un motif apparaissant dans  $\mathcal{R}$ . Etant donné un symbole non terminal  $N \in \mathcal{V}$ ,  $\text{Label}(N)$  est l'ensemble des étiquettes  $e$  de  $\mathcal{E}$  telles que  $\text{Symb}(e) = N$ . Par exemple pour  $\mathcal{G}_1$ ,  $\text{Symb}(\overrightarrow{\text{cite}}) = \text{Doc}$ ,  $\text{Symb}(\text{date}) = \text{Dat}$ ,  $\text{Label}(\text{Dat}) = \{\text{date}\}$  et  $\text{Label}(\text{Nom}) = \{\text{auteur}, \text{titre}, \text{nom}\}$ .

$\text{Expr}(N)$  dénote la partie droite de la règle associée au symbole non terminal  $N$  dans la grammaire. Par exemple pour  $\mathcal{G}_1$ ,  $\text{Expr}(\text{Root})$  est le motif  $(\text{doc } \text{Doc})^*, (\text{editeur } \text{Editeur})^*$  et  $\text{Expr}(\text{Nom})$  est le motif vide  $\Lambda$ .

On peut associer de manière très simple à une grammaire de motifs  $\mathcal{G}$  un graphe de dépendance. Les sommets de ce graphe sont les symboles non terminaux et il existe un arc de  $N$  à  $M$  si  $M$  a une occurrence dans  $\text{Expr}(N)$  dans un motif élémentaire  $(e \text{ M})^{op}$  où  $e \in E$ . Nous insistons ici sur le fait que le graphe de dépendance est construit en faisant abstraction des motifs élémentaires utilisant une référence (une étiquette de  $\vec{E}$ ).

Dans la suite, on dira qu'un symbole non terminal  $N$  est accessible à partir de  $\text{Root}$  ssi il existe un chemin de  $\text{Root}$  à  $N$  dans le graphe de dépendance de la grammaire  $\mathcal{G}$ .

**Exemple 2 (suite)** Le graphe de dépendance associé à la grammaire  $\mathcal{G}_1$  de l'exemple 2 est dessiné en figure 2. Dans ce graphe, on remarque que le sommet associé à  $\text{Doc}$  n'est pas accessible du sommet associé à  $\text{Book}$  car il n'existe aucun motifs élémentaire  $(e \text{ M})^{op}$  où  $e \in E$  dans  $\text{Expr}(\text{Book})$ . L'expression  $\text{Expr}(\text{Book})$  contient bien le motif élémentaire  $(\overrightarrow{\text{cite}} \text{Doc})^*$  mais  $\overrightarrow{\text{cite}}$  appartenant à  $\vec{E}$ , ce motif ne permet pas "d'avoir un arc de  $\text{Book}$  à  $\text{Doc}$ " dans le graphe de dépendance associé à  $\mathcal{G}_1$ .

Nous pouvons maintenant définir un schéma de données semi-structurées comme une grammaire de motifs particulière :

**Définition 5 (Schéma)** Un schéma de données semi-structurées est une grammaire de motifs  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \text{Root}, E \cup \vec{E}, \mathcal{R})$  telle que tout symbole non terminal de  $\mathcal{V}$  est accessible à partir de  $\text{Root}$  dans le graphe de dépendance associé à la grammaire  $\mathcal{G}$ .

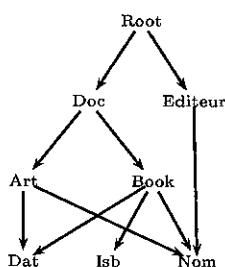


FIG. 2 – Graphe de dépendance associé à la grammaire  $\mathcal{G}_1$

**Exemple 2 (suite)** La grammaire de motifs  $\mathcal{G}_1$  est un schéma de données : tous les sommets de son graphe de dépendance (représenté par la figure 2) sont accessibles à partir du sommet associé à *Root*. Par contre, considérons la grammaire  $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_1, \text{Root}, \mathcal{E}_1, \mathcal{R}_2)$  telle que les règles de  $\mathcal{R}_2$  sont les mêmes que celles de  $\mathcal{R}_1$  sauf pour *Doc* dont la règle associée est  $\text{Doc} ::= (\text{book Book})^!$ . Le graphe de dépendance de  $\mathcal{G}_2$  se trouve en figure 3. Le sommet associé au non terminal *Art* n'est pas accessible à partir du sommet associé à *Root* donc la grammaire  $\mathcal{G}_2$  n'est pas un schéma.

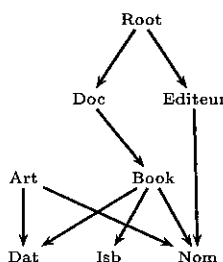


FIG. 3 – Graphe de dépendance associé à la grammaire  $\mathcal{G}_2$

Dans la suite, par abus, nous utilisons indifféremment les termes grammaire de motifs et schéma (en supposant évidemment que la grammaire considérée est un schéma).

Pour définir une instance d'un schéma, nous allons procéder en deux étapes : la première détermine globalement si un graphe de données est filtré par la grammaire de motifs et prépare la vérification ultérieure du "bon typage" des références ; la seconde étape effectue essentiellement la vérification du bon typage des références.

Dans la suite,

- le schéma considéré est la grammaire de motifs  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \text{Root}, E \cup \vec{E}, \mathcal{R})$  ;
- le graphe de données considéré  $\mathcal{S}$  est un graphe  $(S, r, R, V)$  enraciné, dont les arcs et les sommets sont étiquetés,  $S$  est un ensemble d'états,  $R = \{r_e | e \in E \cup \vec{E}\}$  est un ensemble de relations binaires sur  $S$ ,  $r$  est la racine de  $\mathcal{S}$  et  $V$  est une fonction de  $\text{PROP} \rightarrow \text{Pow}(S)$  ; nous noterons  $\text{Out}_e(s)$  l'ensemble des états  $s_1$  tels que  $(s, s_1) \in r_e$  ;
- si  $U$  est un ensemble d'états, alors l'expression  $|U| \cong \text{card}(op)$  signifie :  $|U| \geq 0$  si  $op = *$ ,  $|U| > 0$  si  $op = +$ ,  $|U| = 1$  si  $op = !$ ,  $0 \leq |U| \leq 1$  si  $op = ?$  ;
- le sous-graphe de données obtenu en supprimant de  $\mathcal{S}$  toutes les références est noté  $\text{Pre}(\mathcal{S})$  et il est défini par :  $(S, r, \text{Pre}(R), V)$  de  $\mathcal{S}$ , où  $\text{Pre}(R) = \{r_e | r_e \in R \text{ et } e \in E\}$ .

**Définition 6 (Filtrage et marquage)** On suppose que  $\text{Pre}(\mathcal{S})$  est acyclique.

Un motif *expr* filtre strictement  $\mathcal{S}$  en l'état  $s$  ssi le motif *expr* filtre  $\mathcal{S}$  en  $s$  et, pour tout  $l \in \mathcal{E} - E_{expr}$ , où  $E_{expr}$  est l'ensemble des étiquettes ayant une occurrence dans *expr*,  $Out_l(s) = \emptyset$ .

Simultanément au filtrage, nous définissons deux **fonctions de marquage** *marq* et *requis* associant à un état de  $\mathcal{S}$  un ensemble de symboles non terminaux. Initialement, pour tout état  $s$ , on pose  $marq(s) = \emptyset$ , sauf pour  $marq(r) = \{Root\}$ , et, pour tout état  $s$ , on pose  $requis(s) = \emptyset$ .

La relation "le motif *expr* filtre  $\mathcal{S}$  en un sommet  $s$  de  $\mathcal{S}$ " est définie par :

1.  $(e N)^{op}$  filtre  $\mathcal{S}$  en  $s$  ssi  
 $e \in \vec{E} : |Out_e(s)| \cong card(op)$  et, pour tout  $s_1 \in Out_e(s)$ , le motif  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathcal{S}$  en  $s_1$ . Pour tout  $s_1 \in Out_e(s)$ , la nouvelle valeur de  $mark(s_1)$  est défini en ajoutant  $N$  à l'ancienne valeur de  $mark(s_1)$ .  
 $e \in \overleftarrow{E} : |Out_e(s)| \cong card(op)$  et, pour tout  $s_1 \in Out_e(s)$ , la nouvelle valeur de  $req(s_1)$  est défini en ajoutant  $N$  à l'ancienne valeur de  $req(s_1)$ .
2. A filtre  $\mathcal{S}$  en  $s$  ssi quelque soit  $e \in \mathcal{E}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .
3.  $(e_1 N_1)^{op_1}, \dots, (e_j N_j)^{op_j}$  filtre  $\mathcal{S}$  en  $s$  ssi pour tout  $k$  de  $[1..j]$ , le motif  $(e_k N_k)^{op_k}$  filtre  $\mathcal{S}$  en  $s$ .
4.  $expr_1 | \dots | expr_n$  filtre  $\mathcal{S}$  en  $s$  ssi il existe  $i \in [1..n]$  tel que le motif  $expr_i$  filtre strictement  $\mathcal{S}$  en  $s$ .

La condition d'acyclicité sur  $Pre(\mathcal{S})$  permet d'assurer que le filtrage est défini correctement. La définition de filtrage pourrait être généralisée pour nous dispenser de cette condition d'acyclicité sur  $Pre(\mathcal{S})$ , ceci au prix de quelques modifications techniques. Toutefois, étant donné que la définition d'une instance (ci-dessous) impose à  $Pre(\mathcal{S})$  d'être un arbre, nous avons choisi de définir le filtrage dans ce cas particulier.

**Définition 7 (Instance d'un schéma)** Le graphe de données  $\mathcal{S}$  est une instance du schéma  $\mathcal{G}$  si les conditions ci-dessous sont vérifiées :

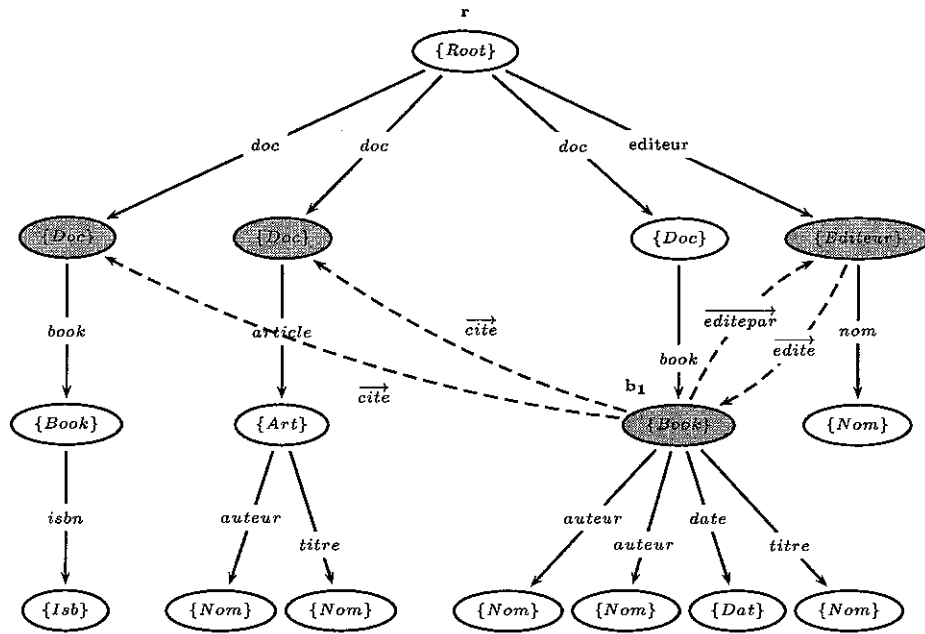
- (i)  $Pre(\mathcal{S})$  est un arbre orienté de racine  $r$ ,
- (ii)  $Expr(Root)$  filtre strictement le graphe de données  $\mathcal{S}$  en la racine  $r$ , et
- (iii) Pour tout état  $s$  de  $\mathcal{S}$ , si  $requis(s) \neq \emptyset$  alors  $requis(s) = marq(s)$ .

**Exemple 1 (suite)** Le graphe de données de la figure 1 est une instance de la grammaire  $\mathcal{G}_1$ . Ici,  $Pre(\mathcal{S})$  est le graphe obtenu à partir de la figure en retirant les arcs pointillés (les références). La figure 4 représente les valeurs des fonctions *marq* et *requis* pour ce graphe de données par rapport à la grammaire  $\mathcal{G}_1$ .

Les valeurs de la fonction *marq* se trouvent dans les sommets correspondant aux états de la figure 1. Comme le graphe de données la figure 1 est une instance de la grammaire  $\mathcal{G}_1$ , la valeur de *requis* est égale à la valeur de *marq* pour les sommets dans lesquels *requis* est non vide. Dans cette figure, on se contente de griser les sommets  $s$  pour lesquels  $requis(s)$  est non vide. On remarque que ces sommets sont les sommets pointés par des références, ceci correspondant bien à la définition de la fonction *requis*.

Les deux propriétés suivantes éclairent la signification des deux fonctions *marq* et *requis* dont le rôle intuitif est de permettre le "typage" les noeuds référencés. La première propriété est liée à la structure d'arbre imposée sur  $Pre(\mathcal{S})$ .





Légende :  $\{Doc\}$  signifie qu'en ce sommet,  $marq = \{Doc\}$  et  $requis = \emptyset$   
 $\{Doc\}$  signifie qu'en ce sommet,  $marq = requis = \{Doc\}$ .

FIG. 4 – Valeurs des fonctions  $marq$  et  $requis$  du graphe de données de la figure 1 en fonction de la grammaire  $\mathcal{G}_1$

**Propriété 1** Si  $Pre(S)$  est un arbre orienté de racine  $r$  et si  $Expr(Root)$  filtre strictement le graphe de données  $S$  en la racine  $r$  alors, pour tout état  $s$ ,  $marq(s)$  est un singleton, i.e. l'état  $s$  est marqué par un et un seul symbole non terminal.

*Esquisse de preuve :* Supposons que  $Pre(S)$  soit un arbre orienté de racine  $r$  et que  $Expr(Root)$  filtre strictement le graphe de données  $S$  en la racine  $r$ . Soit  $s$  un état de  $S$ . La preuve de la propriété 1 est faite en deux étapes :

1. prouver qu'il existe un motif  $expr$  (de  $\mathcal{G}$ ) tel que  $expr$  filtre strictement  $S$  en  $s$  et qu'il existe au moins un élément dans  $marq(s)$ ,
2. prouver qu'il existe au plus un élément dans  $marq(s)$ .

La propriété 1.1 est prouvée par récurrence sur la taille du chemin de  $r$  à  $s$  dans  $Pre(S)$ . La propriété 1.2 est prouvée par l'absurde en exploitant le fait que  $Pre(S)$  est un arbre.  $\square$

La deuxième propriété résulte, quant à elle, de la restriction (ii) posée sur les règles d'une grammaire de motifs qui nous a permis de définir  $Symb(e)$  comme étant l'unique symbole non terminal apparaissant dans des motifs élémentaires associés à l'étiquette  $e$ .

**Propriété 2** Si  $Pre(S)$  est un arbre orienté de racine  $r$  et si  $Expr(Root)$  filtre strictement le graphe de données  $S$  en la racine  $r$ , alors pour tout état  $s$  de  $\bigcup_{s_1 \in S} out_e(s_1)$ , on a  $marq(s) = \{Symb(e)\}$

La preuve de la propriété 2 s'appuie sur la propriété 1.1 et la définition de  $Symb$ . Cette seconde propriété nous permet de déduire que si  $Pre(S)$  est un arbre orienté de racine  $r$

et que  $Expr(Root)$  filtre strictement le graphe de données  $\mathcal{S}$  en la racine  $r$  alors un arc entrant dans un sommet  $s$  et étiqueté par  $e$  détermine la valeur de la fonction  $marq$  de ce sommet, et cette valeur est  $\{Symb(e)\}$ . Ainsi,  $Symb(e)$  correspond à un “type” du sommet  $s$ .

**Exemple 1 (suite)** Considérons la figure 4. Un arc étiqueté par  $book$  a pour destination  $b_1$ , on peut donc en déduire que  $b_1$  “est de type”  $Symb(book)$  c’est-à-dire  $Book$ . Pour vérifier que  $b_1$  est de type  $Book$ , on vérifie que ses arcs sortant vérifient la règle associée à  $Book$  dans  $\mathcal{G}$ .

On peut remarquer que la notion de schéma que nous proposons permet d’exprimer que, dans toute instance du schéma, tout arc de référence doit être “bien typé” : le sommet destination d’une référence a une valeur de la fonction  $requis$  déterminée par le schéma. Formellement, ceci correspond aux conditions (ii) et (iii) de la définition 7. *Cette contrainte de typage de référence n’est pas exprimable par d’autres notions de schéma pour les données semi-structurées présentes dans la littérature, typiquement les DTD.* Par exemple, dans une DTD, on ne pourrait pas indiquer qu’un lien de référence  $editepar$  doit pointer vers un éditeur (plutôt que vers un livre, un article, etc).

### 3.2 Schéma de données semi-structurées et logique multi-modale hybride

Dans cette section, nous allons montrer qu’un schéma de données semi-structurées (tel que défini précédemment) peut être exprimé par une formule de la logique multi-modale hybride, comme les contraintes le sont.

Notre objectif est de définir une fonction de traduction  $TRAD$  qui, à un schéma  $\mathcal{G}$ , associe une formule  $TRAD(\mathcal{G})$  de la logique multi-modale hybride telle que : pour tout graphe  $\mathfrak{M}$  de données semi-structurées,  $\mathfrak{M}$  est une instance de  $\mathcal{G}$  si et seulement si  $\mathfrak{M}$  satisfait globalement la formule  $TRAD(\mathcal{G})$ . Cette démarche peut être visualisée par le schéma de la figure 5.

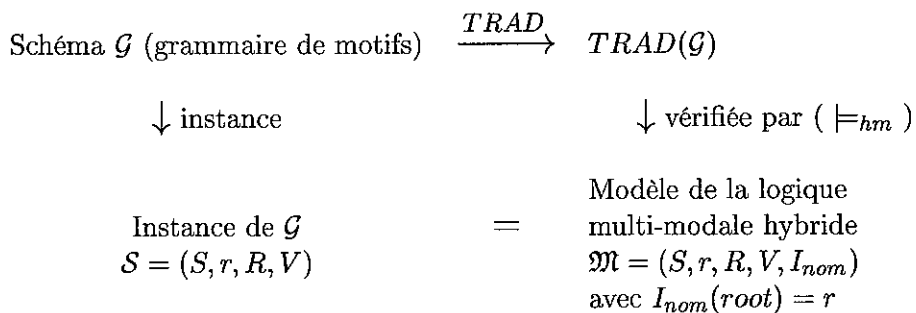


FIG. 5 – Principe de la traduction du schéma

Les deux structures  $\mathfrak{M}$  et  $\mathcal{S}$  étant très similaires, nous nous permettons de les identifier dans la suite et de les noter  $\mathfrak{M}$ .

La définition d’une instance d’un schéma fait intervenir une première condition ( $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre) qui est en fait indépendante de la grammaire de motifs spécifiant le schéma.

Nous allons donc commencer par traduire cette condition par une formule, notée  $ARBRE$ , de la logique multi-modale hybride.

Le fait que  $Pre(\mathfrak{M})$  est le sous-graphe de  $\mathfrak{M}$  obtenu en supprimant les arcs étiquetés par des références est traduit (dans la formule  $ARBRE$ ) à l'aide de :

- l'utilisation des opérateurs modaux  $\langle e \rangle$  et  $[e]$  avec  $e \in \mathcal{E}$  exclusivement, et
- une restriction des opérateurs  $F$  et  $G$ , dans le même esprit :

Soient  $R^E = \bigcup_{e \in E} r_e$  (l'ensemble des relations associées à des étiquettes qui ne sont pas des références) et  $R^{E^+}$  la fermeture transitive de  $R^E$ . Soit  $F^E$  l'opérateur défini par :

$\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} F^E \varphi$  ssi il existe  $s' \in S$  tel que  $((s, s') \in R^{E^+}$  et  $\mathfrak{M}, g, s' \models_{hm} \varphi$ )

De la même façon que  $G$  peut être défini par rapport à  $F$ , l'opérateur  $G^E$  est défini par  $G^E \psi =_{def} \neg F^E \neg \psi$ .

Pour des raisons de lisibilité, nous utilisons dans la suite les abréviations  $G^*$ ,  $F^*$ ,  $G^{E^*}$ , et  $F^{E^*}$  définies respectivement par  $G^{E^*} \psi =_{def} \psi \wedge G^E \psi$ ,  $F^{E^*} \psi =_{def} \psi \vee F^E \psi$ ,  $G^* \psi =_{def} \psi \wedge G \psi$ , et  $F^* \psi =_{def} \psi \vee F \psi$ .

Le graphe  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre ssi les trois propriétés ci-dessous sont vérifiées :

- (a1) tous les états de  $Pre(\mathfrak{M})$  sont accessibles à partir de la racine  $r$ , ce que nous traduisons en logique multi-modale hybride par la formule  $\psi_1 =_{def} \downarrow x @_{root} F^{E^*} x$  ;
- (a2)  $Pre(\mathfrak{M})$  ne contient pas de cycle, ce que nous traduisons en logique multi-modale hybride par la formule  $\psi_2 =_{def} \downarrow x \neg F^E x$  ;
- (a3) tout état de  $Pre(\mathfrak{M})$  a au plus un prédécesseur, ce que nous traduisons en logique multi-modale hybride par la formule  $\psi_3 =_{def} @_{root} G^{E^*} \downarrow x @_{root} G^{E^*} \downarrow y @_{root} G^{E^*} \downarrow z (\bigvee_{e \in E} @_y \langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z \langle e \rangle x \rightarrow @_y z)$ .

Nous pouvons établir le résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 1** Le graphe  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE$  où  $ARBRE =_{def} \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ .

*Esquisse de preuve :* Le graphe  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre ssi  $Pre(\mathfrak{M})$  vérifie les trois propriétés (a1), (a2) et (a3) décrites ci-dessus. On peut décomposer la preuve en 3 étapes principales. La première étape consiste à prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  vérifie la propriété (a1) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$ . La seconde étape va consister à prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  vérifie les propriétés (a1) et (a2) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_2$ . Enfin, la dernière étape va consister à prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  vérifie les propriétés (a1) et (a3) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_3$ .  $\square$

La preuve détaillée peut être trouvée en annexe B.

Sachant que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre, il convient maintenant d'exprimer les conditions (ii) et (iii) de la définition d'une instance (définition 7). Ces deux conditions sont traduites à l'aide des deux définitions suivantes :

**Définition 8 (Traduction d'une expression)** Soit  $expr$  une expression de motif. La traduction de l'expression de motifs  $expr$ , notée  $\tau_{expr}$  est définie de la façon suivante :

1. Si  $expr$  est  $\Lambda$  alors  $\tau_{expr} = \bigwedge_{e \in \mathcal{E}} \neg \langle e \rangle \top$
2. Si  $expr$  est un motif disjonctif  $expr_1 | \dots | expr_j$  alors  $\tau_{expr} = \bigvee_{i \in [1..j]} \tau_{expr_i}$
3. Si  $expr$  est un motif conjonctif<sup>3</sup>  $m_1, \dots, m_j$  alors

<sup>3</sup>Un motif élémentaire est considéré ici comme étant le cas particulier de motif conjonctif à un élément

soit  $\mathcal{E}_+ = \{e \mid (e N)^+ \text{ apparait dans } \text{expr}\}$ ,  
soit  $\mathcal{E}_! = \{e \mid (e N)! \text{ apparait dans } \text{expr}\}$ ,  
soit  $\mathcal{E}_? = \{e \mid (e N)? \text{ apparait dans } \text{expr}\}$ , et  
soit  $E_{\text{expr}}$  l'ensemble des étiquettes apparaissant dans  $\text{expr}$ .

$$\begin{aligned} \tau_{\text{expr}} = & \bigwedge_{e \in \mathcal{E}_+} \langle e \rangle \top \quad \wedge \\ & \downarrow x \bigwedge_{e \in \mathcal{E}_!} (\langle e \rangle \downarrow y (\@_x[e]y)) \quad \wedge \\ & \bigwedge_{e \in \mathcal{E}_?} (\neg \langle e \rangle \top \vee (\downarrow x \langle e \rangle \downarrow y (\@_x[e]y))) \quad \wedge \\ & \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{\text{expr}}} \neg \langle e \rangle \top \end{aligned}$$

En fait,  $\tau_{\text{expr}}$  est la traduction d'une expression de motifs en un état donné. Dans la traduction, toute expression traduite  $\text{expr}$  est associée à un symbole non terminal  $N$  de  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire que  $\text{expr} = \text{Expr}(N)$ , nous utilisons donc le raccourci d'écriture  $\tau_N$  défini par  $\tau_N \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{\text{Expr}(N)}$ .

**Définition 9 (Traduction de schéma)** Soit  $\mathcal{G}$  un schéma. Sa traduction, notée  $\text{TRAD}(\mathcal{G})$ , est la formule :

$$\text{ARBRE} \wedge \text{TRAD}_1(\mathcal{G}) \wedge \text{TRAD}_2(\mathcal{G})$$

où  $\text{TRAD}_1(\mathcal{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \@_{\text{root}} (\tau_{\text{Root}} \wedge \bigwedge_{e \in E} G^*[e] \tau_{\text{Symb}(e)})$ , et

$$\text{TRAD}_2(\mathcal{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \@_{\text{root}} \left( \bigwedge_{\vec{e} \in \vec{E}} G^*[\vec{e}] \downarrow x \left( \bigvee_{e \in \text{Label}(\text{Symb}(\vec{e})) \cap E} \@_{\text{root}} F^*\langle e \rangle x \right) \right).$$

Intuitivement,  $\text{TRAD}_1(\mathcal{G})$  et  $\text{TRAD}_2(\mathcal{G})$  expriment respectivement les conditions (ii) et (iii) de la définition 7.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous illustrons la traduction d'un schéma semi-structuré en une formule de la logique multi-modale hybride pour notre exemple courant.

**Exemple 1 (suite)** La formule associée à la grammaire  $\mathcal{G}$  définie dans l'exemple 2 est  $\text{TRAD}(\mathcal{G}) = \text{ARBRE} \wedge \text{TRAD}_1(\mathcal{G}) \wedge \text{TRAD}_2(\mathcal{G})$  où

$$\begin{aligned} \text{TRAD}_1(\mathcal{G}) \quad \text{est} \quad & \@_{\text{root}} \quad (\tau_{\text{Root}} \wedge G^*[\text{doc}] \tau_{\text{Doc}} \wedge G^*[\text{editeur}] \tau_{\text{Editeur}} \wedge G^*[\text{nom}] \tau_{\text{Nom}} \wedge \\ & G^*[\text{article}] \tau_{\text{Art}} \wedge G^*[\text{book}] \tau_{\text{Book}} \wedge G^*[\text{auteur}] \tau_{\text{Nom}} \wedge \\ & G^*[\text{titre}] \tau_{\text{Nom}} \wedge G^*[\text{date}] \tau_{\text{Dat}} \wedge G^*[\text{isbn}] \tau_{\text{Isb}}) \\ \text{TRAD}_2(\mathcal{G}) \quad \text{est} \quad & \@_{\text{root}} \quad (G^*[\overrightarrow{\text{cite}}] \downarrow x \quad (\@_{\text{root}} F^*\langle \text{doc} \rangle x) \quad \wedge \\ & G^*[\overrightarrow{\text{édité}}] \downarrow x \quad (\@_{\text{root}} F^*\langle \text{book} \rangle x) \quad \wedge \\ & G^*[\overrightarrow{\text{éditépar}}] \downarrow x \quad (\@_{\text{root}} F^*\langle \text{editeur} \rangle x)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\tau_{Root} & : \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{doc, editeur\}} \neg \langle e \rangle \top \\
\tau_{Editeur} & : \downarrow a \langle nom \rangle \downarrow b (@_a[nom]b) \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{nom, \overline{edit\acute{e}}\}} \neg \langle e \rangle \top \\
\tau_{Doc} & : \downarrow a \langle book \rangle \downarrow b (@_a[book]b) \\
& \wedge \downarrow a \langle article \rangle \downarrow b (@_a[article]b) \\
& \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{book, article\}} \neg \langle e \rangle \top \\
\tau_{Art} & : \langle auteur \rangle \top \\
& \wedge \downarrow a \langle titre \rangle \downarrow b (@_a[titre]b) \\
& \wedge (\neg \langle date \rangle \top \vee \downarrow a \langle date \rangle \downarrow b (@_a[date]b)) \\
& \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{auteur, titre, date, \overline{cit\acute{e}}\}} \neg \langle e \rangle \top \\
\tau_{Book} & : \downarrow a \langle isbn \rangle \downarrow b (@_a[isbn]b) \\
& \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{isbn, \overline{cit\acute{e}}\}} \neg \langle e \rangle \top \\
& \vee \\
& \langle auteur \rangle \top \\
& \wedge \downarrow a \langle date \rangle \downarrow b (@_a[date]b) \\
& \wedge \downarrow a \langle titre \rangle \downarrow b (@_a[titre]b) \\
& \wedge \downarrow a \langle \overrightarrow{editepar} \rangle \downarrow b (@_a[\overrightarrow{editepar}]b) \\
& \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{auteur, date, titre, \overline{cit\acute{e}}, \overrightarrow{editepar}\}} \neg \langle e \rangle \top \\
\tau_{Nom} & : \bigwedge_{e \in \mathcal{E}} \neg \langle e \rangle \top \\
\tau_{Dat} & : \bigwedge_{e \in \mathcal{E}} \neg \langle e \rangle \top \\
\tau_{Isb} & : \bigwedge_{e \in \mathcal{E}} \neg \langle e \rangle \top
\end{aligned}$$

L'exemple principal associé au graphe de données présenté dans la figure 1 est un modèle de  $TRAD(\mathcal{G}_1)$  donc ce graphe est une instance du schéma  $\mathcal{G}_1$ .

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section :

**Théorème 3** Soit  $TRAD(\mathcal{G})$  la formule de la logique multi-modale hybride définie par  $ARBRE \wedge TRAD_1(\mathcal{G}) \wedge TRAD_2(\mathcal{G})$ . Un graphe de données  $\mathfrak{M}$  est une instance de  $\mathcal{G}$  ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD(\mathcal{G})$ .

La preuve de ce théorème se trouve en annexe C.

Voici un second exemple illustrant la traduction d'un schéma *récursif*. La grammaire que nous utilisons pour cet exemple décrit un arbre binaire.

**Exemple 2 (schéma récursif)** Soit la grammaire  $\mathcal{G}_3 = (\mathcal{V}_3, Root, \mathcal{E}_3, \mathcal{R}_3)$  où  $\mathcal{V}_3 = \{Root, Abr, Feuil\}$ ,  $\mathcal{E}_3 = \{arbre, ag, ad, feuille\}$  et

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3 = \{ & \text{Root} & : := & (\text{arbre } Abr)^+ \\
& \text{Abr} & : := & (\text{ag } Abr)!, (\text{ad } Abr)! \\
& & & | (\text{feuille } Feuil)! \}
\end{aligned}$$

La formule associée à la grammaire  $\mathcal{G}_3$  est  $TRAD(\mathcal{G}_3) = ARBRE \wedge TRAD_1(\mathcal{G}_3) \wedge TRAD_2(\mathcal{G}_3)$  où

$TRAD_1(\mathcal{G}_3)$  est  $@_{root}(\tau_{Root} \wedge G^*[ag]\tau_{Abr} \wedge G^*[ad]\tau_{Abr} \wedge G^*[feuille]\tau_{Feuil})$ , et  $TRAD_2(\mathcal{G}_3)$  est  $\top$ ,

avec

$$\begin{aligned} \tau_{Root} & : \langle arbre \rangle \top \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{arbre\}} \neg \langle e \rangle \top \\ \tau_{Abr} & : \begin{aligned} & \downarrow a \langle ag \rangle \downarrow b (@_a[ag]b) \\ & \wedge \downarrow a \langle ad \rangle \downarrow b (@_a[ad]b) \\ & \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{ag, ad\}} \neg \langle e \rangle \top \end{aligned} \\ & \vee \\ & \begin{aligned} & \downarrow a \langle feuille \rangle \downarrow b (@_a[feuille]b) \\ & \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} \setminus \{feuille\}} \neg \langle e \rangle \top \end{aligned} \\ \tau_{Feuil} & : \bigwedge_{e \in \mathcal{E}} \neg \langle e \rangle \top \end{aligned}$$

## Autres approches et perspectives

Dans la section 2, nous avons déjà explicité le lien entre notre approche et le travail de [BFW98].

Dans [AddR01], une logique propositionnelle dynamique avec nominaux, notée  $PDL^{PATH}$ , est proposée afin d'étudier la formalisation de contraintes sur les chemins pour les données semiestructurées. La sémantique de cette logique est définie par des graphes orientés, non ordonnés, enracinés et connexes. D'une part, les auteurs montrent que cette logique permet de formaliser les contraintes d'inclusion. D'autre part, ils montrent que le problème de l'implication pour ces contraintes est décidable en temps exponentiel.

- Le langage de la logique multi-modale hybride que nous explorons dans le présent article permet d'exprimer des propriétés de graphes que  $PDL^{PATH}$  ne peut pas exprimer : ceci grâce à la présence de variables d'état et du binder  $\downarrow$ . En effet, comme montré dans [ABM99], la logique multi-modale hybride sans les opérateurs de clôture  $F$  et  $G$ , sans variables d'états et sans binder  $\downarrow$  est décidable. Par contre l'ajout du binder  $\downarrow$  rend le problème de la satisfiabilité indécidable : la logique obtenue est équivalente au fragment de la logique classique du premier ordre dit "borné".
- $PDL^{PATH}$  permet d'exprimer la clôture réflexive et transitive de n'importe quelle relation de chemin, et non pas seulement de l'union des relations d'accessibilité comme c'est le cas pour notre langage.

Parmi les perspectives de notre travail, il serait intéressant d'étudier des fragments de la logique multi-modale hybride, interprétés sur des graphes connexes enracinés, et ceci en relation avec  $PDL^{PATH}$ . Le fragment contenant  $F$  et  $G$  mais ne contenant pas le binder  $\downarrow$  est un premier candidat. Cette étude pourrait produire en général des informations sur la décidabilité de fragments de logique multi-modale hybride.

En connection avec ce qui précède, nous avons aussi pour objectif d'identifier des fragments intéressants dans le cadre de l'optimisation et du problème de l'inclusion de requêtes XPATH dans la lignée de [DT01, CLM02].

A notre connaissance, notre travail est pionnier en ce qui concerne la notion de schéma, notion assez générale pour permettre le typage des références. Les liens entre notre approche et celles de [CGL98] méritent d'être explorés.

## Références

- [ABM99] C. Areces, P. Blackburn, and M. Marx. A road-map on complexity for hybrid logics. In J. Flum and M. Rodríguez-Artalejo, editors, *Computer Science Logic*, number 1683 in LNCS, pages 307–321. Springer, 1999. Proceedings of the 8th Annual Conference of the EACSL, Madrid, September 1999.
- [ABS00] Serge Abiteboul, Peter Bunemann, and Dan Suciu. *Data on the web*. Morgan Kaufman, 2000.
- [ADdR01] N. Alechina, S. Demri, and M. de Rijke. Path constraints from a modal logic point of view (extended abstract). In M. Lenzerini, D. Nardi, W. Nutt, and D. Suciu, editors, *Proc. 8th Int. Workshop on Knowledge Representation meets Databases (KRDB'01), Roma, Italy, Sep. 2001*, volume 45, 2001.
- [AV97] Serge Abiteboul and Victor Vianu. Regular path queries with constraints. In *PODS*, pages 122–133, 1997.
- [BFW98] Peter Buneman, Wenfei Fan, and Scott Weinstein. Path constraints on semi-structured and structured data. In *PODS*, pages 129–138, Jun 1998.
- [Bla00] P. Blackburn. Representation, reasoning, and relational structures : a hybrid logic manifesto. *Logic Journal of the IGPL*, 8(3) :339–365, 2000.
- [BT99] P. Blackburn and M. Tzakova. Hybrid languages and temporal logic. *Logic Journal of the IGPL*, 7(1) :27–54, 1999.
- [CGL98] Diego Calvanese, Giuseppe De Giacomo, and Maurizio Lenzerini. Semi-structured data with constraints and incomplete information. In *International Workshop on Description Logics (DL'98)*, 1998.
- [CGL99] Diego Calvanese, Giuseppe De Giacomo, and Maurizio Lenzerini. Queries and constraints on semi-structured data. *Lecture Notes in Computer Science*, 1626, 1999.
- [CLM02] Diego Calvanese, Maurizio Lenzerini, and Rajeev Motwani, editors. *XPath containment in the presence of disjunction, DTDs, and variables*, volume 2572 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2002.
- [DT01] Alin Deutsch and Val Tannen. Containment of regular path expressions under integrity constraints. In *Knowledge Representation Meets Databases*, 2001.
- [Ray01] Erik T. Ray. *Introduction à XML*. O'Reilly, 2001.

## Table des figures

1	Représentation d'une base de données de bibliothèque . . . . .	4
2	Graphe de dépendance associé à la grammaire $\mathcal{G}_1$ . . . . .	13
3	Graphe de dépendance associé à la grammaire $\mathcal{G}_2$ . . . . .	13
4	Valeurs des fonctions <i>marq</i> et <i>requis</i> du graphe de données de la figure 1 en fonction de la grammaire $\mathcal{G}_1$ . . . . .	15
5	Principe de la traduction du schéma . . . . .	16
6	Dépendance des lemmes pour la preuve du théorème 3 . . . . .	37



## Index

- ARBRE*, 17
- Pre(S)*, 13
- TRAD(G)*, 19
- TRAD*<sub>1</sub>, 18
- TRAD*<sub>2</sub>, 18
- S*, 13
- $\tau_N$ , 18
- $\tau_{expr}$ , 17
- Expr, 12
- Label, 12
- Symb, 12
  
- Chemin (de *P*), 8
- Contrainte de chemin, 8
- Contraintes , 8–10
  
- Etiquettes, 10
  
- Filtrage, 13
- Filtrage strict, 14
- Fonction *marq*, 14
- Fonction *requis*, 14
- Fonction *TRAD*, 16
- Fonction *TRAD(G)*, 19
- Fonction *TRAD*<sub>1</sub>, 18
- Fonction *TRAD*<sub>2</sub>, 18
- Fonctions de marquage, 14
- Formule *ARBRE*, 17
  
- Grammaire de motifs, 11
- Graphe de dépendance, 12
  
- Instance, 14, 19
- Inverse Constraints, 9
  
- Langage *P*, 8
- Logique multi-modale, 4–6
- Logique multi-modale hybride, 4
  
- Marquage, 13
- Modèle (logique multi-modale hybride), 7
- Modèle (logique multi-modale), 4
- Motif, 10
- Motif élémentaire, 10
- Motif conjonctif, 10
- Motif disjonctif, 10
- Motif vide, 10
  
- Pure (formule), 8
  
- Références, 10
- Règle, 11
  
- Satisfaction globale, 7
- Schéma, 10–13
- Schéma (définition), 12
- Schéma récursif, 19
- Symbole  $\Lambda$ , 10
- Symbole  $\models_{mm}$ , 5
- Symbole  $\models_{hm}$ , 7
- Symbole *Root*, 10, 12
- Symbole non terminal, 10
  
- Traduction  $\tau_{expr}$ , 17
- Traduction  $\tau_N$ , 18
- Traduction *TRAD*, 16
- Traduction *TRAD(G)*, 19
- Traduction *TRAD*<sub>1</sub>, 18
- Traduction *TRAD*<sub>2</sub>, 18
- Traduction (Schéma) , 16–19
- Traduction d'expression (définition), 17
- Traduction de schéma (définition), 18

## A Preuve du théorème 1 (énoncé à la page 9)

Le langage  $P$  de [BFW98] est un sous-langage de la logique classique du premier ordre.

Étant donné un ensemble d'étiquettes  $E$  et un ensemble de relations binaires  $R = \{R_e | \forall e \in E, R_e \subseteq E \times E\}$ , un ensemble de symboles propositionnels, un modèle de la logique classique du premier ordre est une structure  $\mathcal{I}$  de la forme  $\mathcal{I} = \{D, \mathcal{I}_{REL}, \mathcal{I}_{CONST}\}$  où  $D$  est un ensemble non vide appelé domaine,  $\mathcal{I}_{REL}$  envoie chaque symbole de relation à  $n$  arguments sur une relation de  $R$ , c'est-à-dire sur un ensemble de  $n$ -uplets éléments de  $D^n$  (dans notre cas, on a toujours  $n = 2$ ). Dans le cadre de l'article [BFW98], l'ensemble des fonctions se limite à une seule constante :  $r$ . Ainsi,  $\mathcal{I}_{CONST}$  envoie la constante  $r$  sur un élément du domaine de  $D$  que nous nomerons  $r$  par simplicité.

La preuve de ce théorème va consister à exhiber une fonction de traduction d'une formule de  $P$  dans une formule de  $\mathcal{H}$ .

Dans la suite, on note  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  le modèle de la logique multi-modale hybride associé à un modèle  $\mathcal{I}$  de la logique classique du premier ordre. On définit  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$  comme suit :

- $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}} = (S, r, \{r_e | \forall e \in E, r_e : E \rightarrow E\}, V, \mathcal{I}_{nom})$  où
- chaque état de  $S$  correspond à un élément de  $D$ ,
  - quelque soit  $e$ ,  $r_e = \mathcal{I}_{REL}(R_e)$ ,
  - $V$  est vide,
  - $PROP$  est vide,
  - il existe un état distingué  $r$  dans  $S$  et tel que  $\mathcal{I}_{nom}(r) = r$ . (par simplicité, on utilise le même nom de variable pour la syntaxe et pour la sémantique).

La fonction de traduction, que nous nomons  $T_P$  fait correspondre une contrainte de chemin  $C$  de  $P$  (sur un modèle  $\mathcal{I}$ ) à une formule de la logique multi-modale hybride telle que

$$\mathcal{I} \models_{fo} C \text{ ssi } \mathfrak{M}_{\mathcal{I}} \models_{hm} T_P(C)$$

D'après la définition de formule de  $P$ ,  $C$  est une formule rectifiée<sup>4</sup> exprimant une contrainte de chemin de la formule *backward* ou *forward*.

Une contrainte  $C$  étant de la forme  $C = \forall xy (\alpha(r, x) \wedge \beta(x, y) \rightarrow \gamma(x, y))$ , la traduction de cette contrainte, notée  $T_P(C)$  est définie de la façon suivante :

$$T_P(\forall xy (\alpha(r, x) \wedge \beta(x, y) \rightarrow \gamma(x, y))) = PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$$

avec

$$\begin{aligned} PREF(\varepsilon(x, y)) &= @_x \downarrow y \\ &\text{avec } x \in SVAR \text{ et } y \in SVAR \\ PREF(R_e(x, y)) &= @_x [e] \downarrow y \\ &\text{avec } x \in SVAR \text{ et } y \in SVAR \\ PREF(\exists z (R_e(x, z) \wedge \beta(z, y))) &= @_x [e] \downarrow z PREF(\beta(z, y)) \\ &\text{avec } x \in SVAR \text{ et } y \in SVAR \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Une formule  $C$  est dite *rectifiée* si

1. l'ensemble des variables libres de  $C$  et l'ensemble des variables liées de  $C$  sont disjoints, et
2. si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux occurrences distinctes de quantificateurs dans  $C$  alors  $Q_1$  et  $Q_2$  lient deux variables  $x$  et  $y$  différentes.

et

$$\begin{aligned}
SUFF(\varepsilon(x, y)) &= @_x y \\
&\text{avec } x \in SVAR \text{ et } y \in SVAR \\
SUFF(R_e(x, y)) &= @_x \langle e \rangle y \\
&\text{avec } x \in SVAR \text{ et } y \in SVAR \\
SUFF(\exists z(R_e(x, z) \wedge \beta(z, y))) &= @_x \langle e \rangle \downarrow z SUFF(\beta(z, y)) \\
&\text{avec } x \in SVAR \text{ et } y \in SVAR
\end{aligned}$$

La preuve du bien fondé de cette traduction nécessite une définition et la preuve de quelques lemmes.

**Définition 10 (taille d'un chemin de  $P$ )** La taille d'un chemin  $\alpha(x, y)$  de  $P$ , notée  $|\alpha(x, y)|$  ou  $|\alpha|$ , est définie récursivement (selon la forme de  $\alpha(x, y)$ ) de la façon suivante :

si  $\alpha(x, y) = \varepsilon(x, y)$  alors  $|\alpha(x, y)| = 0$   
si  $\alpha(x, y) = R_e(x, y)$  alors  $|\alpha(x, y)| = 1$   
si  $\alpha(x, y) = \exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y))$  alors  $|\alpha(x, y)| = |\delta(z, y)| + 1$  où  $\delta(z, y)$  est un chemin.

**Lemme 2** Si  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  alors  $\mathfrak{M}, g \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$ .

Notons que la réciproque est de ce lemme est évidente.

Preuve: De façon à prouver ce lemme, on prouve que  
 $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  ssi  $\mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  avec  $s_1 \neq s_2$ .

On identifie trois différents cas correspondant à la forme de  $\beta(x, y)$  :

Cas 1 : si  $\beta(x, y)$  est de la forme  $\varepsilon(x, y)$ .

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} SUFF(\varepsilon(x, y)) &\text{ ssi } \mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} @_x y \text{ ssi } \mathfrak{M}, g, x \models_{hm} y, \text{ et} \\
\mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} SUFF(\varepsilon(x, y)) &\text{ ssi } \mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} @_x y \text{ ssi } \mathfrak{M}, g, x \models_{hm} y.
\end{aligned}$$

Cas 2 : si  $\beta(x, y)$  est de la forme  $R_e(x, y)$ .

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} SUFF(R_e(x, y)) &\text{ ssi } \mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} @_x \langle R_e \rangle y \text{ ssi } \mathfrak{M}, g, x \models_{hm} \langle R_e \rangle y, \\
\text{et} \\
\mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} SUFF(R_e(x, y)) &\text{ ssi } \mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} @_x \langle R_e \rangle y \text{ ssi } \mathfrak{M}, g, x \models_{hm} \langle R_e \rangle y.
\end{aligned}$$

Cas 3 : si  $\beta(x, y)$  est de la forme  $\exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y))$ .

$$\begin{aligned}
\text{Alors, } \mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} SUFF(\exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y))) \\
\text{ssi } \mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} @_x \langle R_e \rangle \downarrow z SUFF(\delta(z, y)) \\
\text{ssi } \mathfrak{M}, g, x \models_{hm} \langle R_e \rangle \downarrow z SUFF(\delta(z, y)). \\
\text{Et, } \mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} SUFF(\exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y))) \\
\text{ssi } \mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} @_x \langle R_e \rangle \downarrow z SUFF(\delta(z, y)) \\
\text{ssi } \mathfrak{M}, g, x \models_{hm} \langle R_e \rangle \downarrow z SUFF(\delta(z, y))
\end{aligned}$$

■

D'après la définition de satisfaction globale respectivement à une valuation (voir 1.2 page 7), la propriété réciproque du lemme 2 est évidente. Cette remarque donne lieu au corrolaire suivant (corrolaire 1) :

**Corollaire 1 (du lemme 2)** Si  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  ssi  $\mathfrak{M}, g \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$ .

**Lemme 3** Soit  $\nu$  une évaluation des variables du langage de la logique classique du premier ordre et soit  $g$  une évaluation des variables d'état de la logique multi-modale hybride. On a :  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} \beta(x, y)$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$  ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$ .

Ce lemme exprime la propriété : "il existe un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $\mathcal{I}$  ssi il existe un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}$ ".

Preuve: La preuve est faite par induction sur  $|\beta|$ .

(Cas de base)  $|\beta(x, y)| = 0$ . Dans ce cas,  $\beta(x, y)$  est  $\varepsilon(x, y)$ .

Alors,  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} \beta(x, y)$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$   
ssi  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} \varepsilon(x, y)$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$   
ssi  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} x = y$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$   
ssi  $\nu(x) = \nu(y)$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$ .

Et,  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, s \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, s \models_{hm} SUFF(\varepsilon(x, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, s \models_{hm} @_x y$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, g(x) \models_{hm} y$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi  $g(x) = g(y)$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$ .

(Hypothèse d'induction)  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} \beta(x, y)$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$   
ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$  pour  $|\beta(x, y)| = n - 1$ .

(Cas d'induction)  $|\beta(x, y)| = n$  avec  $n > 0$ .  $|\beta(x, y)| = n$  c'est-à-dire  $\beta(x, y)$  est de la forme  $\exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y))$ . Notons que  $|\delta(z, y)| = n - 1$ .

Alors,  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} \beta(x, y)$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$   
ssi  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} \exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y))$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$   
ssi il existe  $d \in D$  tel que  $\mathcal{I}, \nu_1 \models_{fo} R_e(x, z) \wedge \delta(z, y)$   
avec  $\nu_1 \stackrel{z}{\sim} \nu$  et  $\nu_1(z) = d$  et  $\nu_1(x) = a$  et  $\nu_1(y) = b$   
ssi il existe  $d \in D$  tel que  $\mathcal{I}, \nu_1 \models_{fo} R_e(x, z)$  et  $\mathcal{I}, \nu_1 \models_{fo} \delta(z, y)$   
avec  $\nu_1 \stackrel{z}{\sim} \nu$  et  $\nu_1(x) = a$  et  $\nu_1(y) = b$  et  $\nu_1(z) = d$   
ssi il existe  $d \in D$  tel que  $(\nu_1(x), \nu_1(z)) \in \mathcal{I}_{rel}(R_e)$  et  $\mathcal{I}, \nu_1 \models_{fo} \delta(z, y)$   
avec  $\nu_1 \stackrel{z}{\sim} \nu$  et  $\nu_1(x) = a$  et  $\nu_1(y) = b$  et  $\nu_1(z) = d$ .

Et,  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, s \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, s \models_{hm} SUFF(\exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y)))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, s \models_{hm} @_x \langle R_e \rangle \downarrow z SUFF(\delta(z, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi <sup>(a1)</sup>  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, g(x) \models_{hm} \langle R_e \rangle \downarrow z SUFF(\delta(z, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi <sup>(a2)</sup> il existe  $d \in S$  tel que  $(g(x), d) \in R_e$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g, d \models_{hm} \downarrow z SUFF(\delta(z, y))$   
avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$   
ssi <sup>(a3)</sup> il existe  $d \in S$  tel que  $(g(x), d) \in R_e$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}}, g_1, d \models_{hm} SUFF(\delta(z, y))$   
avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$  et  $g_1 \stackrel{z}{\sim} g$  et  $g_1(z) = d$

ssi <sup>(a4)</sup> il existe  $d \in S$  tel que  $(g(x), d) \in R_e$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}, g_1} \models_{hm} SUFF(\delta(z, y))$   
avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$  et  $g_1 \stackrel{z}{\sim} g$  et  $g_1(z) = d$

L'équivalence (a1) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur @. L'équivalence (a2) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\langle R_e \rangle$ . L'équivalence (a3) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (a4) est obtenue d'après le lemme 2.

Sachant que  $|\delta(z, y)| = n - 1$  et d'après l'hypothèse d'induction appliquée à  $\delta(z, y)$ ,  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}, g, s} \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$  est équivalent à  $\mathcal{I}, \nu \models_{fo} \beta(x, y)$  avec  $\nu(x) = a$  et  $\nu(y) = b$ .

■

**Corollaire 2 (du lemme 3)** Soit  $g$  une valuation des variables d'état de la logique multimodale hybride. Soient deux état  $a$  et  $b$  de  $S$ . On a : il existe un chemin  $\beta$  allant de  $a$  à  $b$  ssi  $\mathfrak{M}_{\mathcal{I}, g} \models_{hm} SUFF(\beta(x, y))$  avec  $g(x) = a$  et  $g(y) = b$ .

Par définition,  $\mathcal{I} \models_{fo} \forall xy(\alpha(\text{root}, x) \wedge \beta(x, y) \Rightarrow \gamma(x, y))$  signifie que "Pour tout état  $s_1 \in D$  et pour tout état  $s_2 \in D$ , si il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$  et il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$  alors il existe un chemin éventuellement vide  $\gamma$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ ."

**Lemme 4** Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} TP(\forall xy(\alpha(\text{root}, x) \wedge \beta(x, y) \Rightarrow \gamma(x, y)))$
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $a$  à  $s_2$ , il existe un chemin éventuellement vide  $\gamma$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ .

On rappelle que la  $\mathfrak{M} \models_{hm} TP(\forall xy(\alpha(\text{root}, x) \wedge \beta(x, y) \Rightarrow \gamma(x, y)))$  est équivalent à  $\mathfrak{M} \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$ .

*Esquisse de preuve* : La preuve est constituée de trois parties :

**Première partie** : Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , on a  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y))$  avec  $g'(x) = s_1$ .

**Deuxième partie** : Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ , on a  $\mathfrak{M}, g'', s_2 \models_{hm} SUFF(\gamma(x, y))$  avec  $g''(x) = s_1$  et  $g''(y) = s_2$ .

**Troisième partie** : Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ , il existe un chemin  $\gamma$  de  $s_1$  à  $s_2$

□

Preuve:

**Première partie :** Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , on a  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y))$  avec  $g'(x) = s_1$ .

On rappelle que d'après la définition de satisfaction globale,

$\mathfrak{M} \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  signifie que pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s \in S$ ,

$\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$ .

Pour prouver l'équivalence correspondant à la partie (1), nous nous intéressons à la valeur de la traduction de  $PREF(\alpha(r, x))$  en fonction de la forme de  $\alpha(r, x)$ . D'après la définition de chemin (définition 1 page 8),  $\alpha(r, x)$  peut avoir 3 formes différentes. Ces trois formes donnent donc lieu à trois sous-cas.

Soit  $g$  une valuation quelconque et  $s$  un état quelconque.

**(Sous-cas 1) - cas du chemin vide**  $|\alpha(r, x)| = 0$  c'est-à-dire  $\alpha(r, x)$  est de la forme

$\varepsilon(r, y)$ .

Dans ce cas,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} PREF(\alpha(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$

ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} PREF(\varepsilon(r, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$

ssi <sup>(a1)</sup>  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_{root} \downarrow x (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  où  $x \in SVAR$  et  $y \in SVAR$

ssi <sup>(a2)</sup>  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \downarrow x (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  où  $x \in SVAR$  et  $y \in SVAR$

ssi <sup>(a3)</sup>  $\mathfrak{M}, g', r \models_{hm} (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  où  $x \in SVAR$ ,  $y \in SVAR$ ,  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = r$

L'équivalence (a1) est obtenue d'après la définition de la traduction  $T_P$  (section A page 24). L'équivalence (a2) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur @ de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a3) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur  $\downarrow$  de la logique multi-modale hybride.

Ici, le seul état  $s_1$  tel qu'il existe un chemin vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$  est  $r$ . Donc  $\mathfrak{M}, g', r \models_{hm} (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  avec  $g'(x) = r$ <sup>5</sup>. est bien équivalent à "pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , on a  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y))$  avec  $g'(x) = s_1$ ."

Pour une raison de simplification de la preuve, nous supposons qu'un chemin de  $P$  ne peut pas contenir une sous-formule de la forme  $\exists z (R_e(x_1, z) \wedge \varepsilon(z, y_1))$ . C'est-à-dire que le chemin vide  $\varepsilon$  ne peut pas apparaître dans l'expression d'un chemin de longueur

<sup>5</sup>La valeur de  $g$  pour les états différents de  $x$  est quelconque puisque  $g$  est quelconque et  $g' \overset{x}{\sim} g$ .

non vide. Ceci ne constitue pas une restriction du langage  $P$  car un tel chemin peut être écrit de façon sémantiquement équivalente par  $R_e(x, y)$ .

Les deux autres sous-cas suivants, correspondant à un chemin  $\alpha(r, x)$  non vide, vont constituer une preuve par induction. Le sous-cas 2, correspondant à un chemin  $\alpha$  de longueur 1, est la base de l'induction. Le sous-cas 3, correspond quant à lui à un chemin de longueur strictement supérieure à 1, constitue le cas d'induction de la preuve.

**(Sous-cas 2 - cas de base de l'induction)**  $|\alpha(r, x)| = 1$  c'est-à-dire  $\alpha(r, x)$  est de la forme  $R_e(x, y)$ , où  $R_e \in R$

Dans ce cas,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} PREF(\alpha(r, y))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$

ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} PREF(R_e(r, x))(PREF\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y))$

ssi <sup>(a1)</sup>  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_{root}[e]\downarrow x (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  où  $x \in SVAR$  et  $y \in SVAR$

ssi <sup>(a2)</sup>  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} [e]\downarrow x (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  où  $x \in SVAR$  et  $y \in SVAR$

ssi <sup>(a3)</sup> pour tout état  $s_1$  accessible de  $r$  par un arc étiqueté par  $e$ ,  
 $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \downarrow x (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  où  $x \in SVAR$  et  $y \in SVAR$

ssi <sup>(a4)</sup> pour tout état  $s_1$  accessible de  $r$  par un arc étiqueté par  $e$ ,  
 $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  où  $x \in SVAR, y \in SVAR,$   
 $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s_1$

ssi <sup>(a5)</sup> pour tout état  $s_1$  accessible de  $r$  par le chemin  $\alpha$ ,  
 $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} (PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$  avec  $g'(x) = s_1$

L'équivalence (a1) est obtenue d'après la définition de la traduction  $T_P$  (section A page 24). L'équivalence (a2) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur  $@$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a3) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur  $[e]$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a4) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur  $\downarrow$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a5) est obtenue d'après la définition du chemin  $\alpha$ .

**(Hypothèse d'induction)** On suppose que pour tout chemin  $\delta$  de longueur  $n \geq 1$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} PREF(\delta(r_1, x))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\delta$  allant de  $r_1$  à  $s_1$ , on a  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y))$  avec  $g'(x) = s_1$ .

**(Sous-cas 3) - cas d'induction**  $|\alpha(r, x)| = n + 1$  avec  $n \geq 1$ , c'est-à-dire  $\alpha(r, x)$  est de la forme  $\exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y))$ . On note ici que  $\delta(x, y)$  est de taille  $n$ .

Dans ce cas,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} PREF(\alpha(r, y))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$

ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} PREF(\exists z(R_e(x, z) \wedge \delta(z, y)))(PREF\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y))$

ssi <sup>(a1)</sup>  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_{root}[e]\downarrow z PREF(\beta(z, y))(PREF(\beta(x, y))SUFF(\gamma(x, y)))$   
où  $x \in SVAR$  et  $y \in SVAR$

ssi <sup>(a2)</sup>  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} [e] \downarrow z \text{ PREF}(\delta(z, y))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$  où  $x \in \text{SVAR}$  et  $y \in \text{SVAR}$

ssi <sup>(a3)</sup> pour tout état  $s_n$  accessible de  $r$  par un arc étiqueté par  $e$ ,  
 $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \downarrow z \text{ PREF}(\delta(z, y))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$  où  $x \in \text{SVAR}$ ,  $y \in \text{SVAR}$

ssi <sup>(a4)</sup> pour tout état  $s_n$  accessible de  $r$  par un arc étiqueté par  $e$ ,  
 $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \text{PREF}(\delta(z, y))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$  où  $x \in \text{SVAR}$   
et  $y \in \text{SVAR}$ ,  $g^n \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g^n(z) = s_n$

ssi <sup>(a5)</sup> pour tout état  $s_n$  accessible de  $r$  par un arc étiqueté par  $e$ ,  
pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant  
de  $s_n$  à  $s_1$ ,  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \text{PREF}(\delta(z, y))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$   
où  $x \in \text{SVAR}$  et  $y \in \text{SVAR}$ ,  $g^n(z) = s_n$ , et  $g'(x) = s_1$

ssi <sup>(a6)</sup> pour tout état  $s_1$  accessible de  $r$  tel qu'il existe un chemin  $\alpha$  allant de  
 $r$  à  $s_1$ ,  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} (\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$  où  $x \in \text{SVAR}$  et  
 $y \in \text{SVAR}$ ,  $g^n(z) = s_n$ , et  $g'(x) = s_1$

L'équivalence (a1) est obtenue d'après la définition de la traduction  $T_P$  (section A page 24). L'équivalence (a2) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur @ de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a3) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur  $[e]$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a4) est obtenue d'après sémantique de l'opérateur  $\downarrow$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a5) est obtenue d'après l'hypothèse d'induction appliqué au chemin  $\delta$ . L'équivalence (a6) est obtenue d'après la définition du chemin  $\alpha$ .

**Deuxième partie :** Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} \text{PREF}(\alpha(r, x))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ , on a  $\mathfrak{M}, g'', s_2 \models_{hm} \text{SUFF}(\gamma(x, y))$  avec  $g''(x) = s_1$  et  $g''(y) = s_2$ .

D'après l'étape précédente,

- $\mathfrak{M} \models_{hm} \text{PREF}(\alpha(r, x))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , on a  $\mathfrak{M}, g', s_2 \models_{hm} (\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$  avec  $g'(x) = s_1$ .

À ce point de la preuve, il doit certainement apparaître au lecteur que cette étape peut être prouvée de façon similaire à l'étape précédente. Nous ne détaillons donc pas la preuve de cette étape.

**Troisième partie** Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} \text{PREF}(\alpha(r, x))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$ ,
- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ , il existe un chemin  $\gamma$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ .

D'après les deux étapes précédentes,

- $\mathfrak{M} \models_{hm} \text{PREF}(\alpha(r, x))(\text{PREF}(\beta(x, y))\text{SUFF}(\gamma(x, y)))$ ,



- Pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ , on a  $\mathfrak{M}, g'', s_2 \models_{hm} SUFF(\gamma(x, y))$  avec  $g''(x) = s_1$  et  $g''(y) = s_2$ .

D'après le corollaire 1 page 25, la seconde propriété est équivalente à "pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ , on a  $\mathfrak{M}, g'' \models_{hm} SUFF(\gamma(x, y))$  avec  $g''(x) = s_1$  et  $g''(y) = s_2$ ."

D'après le corollaire 2, ceci est équivalent à "pour tout état  $s_1 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\alpha$  allant de  $r$  à  $s_1$ , pour tout état  $s_2 \in S$  tel qu'il existe un chemin éventuellement vide  $\beta$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ , il existe un chemin  $\gamma$  allant de  $s_1$  à  $s_2$ ."

■

## B Preuve du lemme 1 (énoncé à la page 17)

On rappelle que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre ssi les trois propriétés ci-dessous sont vérifiées :

- (a1) tous les états de  $Pre(\mathfrak{M})$  sont accessibles à partir de la racine  $r$ ,
- (a2)  $Pre(\mathfrak{M})$  ne contient pas de cycle, et
- (a3) tout état de  $Pre(\mathfrak{M})$  a au plus un prédécesseur.

On rappelle que  $Pre(\mathcal{S})$  est le sous-graphe de données obtenu en supprimant de  $\mathcal{S}$  toutes les références et est défini par :  $(S, r, Pre(R), V)$  de  $\mathcal{S}$ , où  $Pre(R) = \{r_e | r_e \in R \text{ et } e \in E\}$ .

On rappelle également que les formules  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  et  $ARBRE$  ont été définies comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_1 &=_{def} \downarrow x @_{root} F^{E^*} x, & \psi_2 &=_{def} \downarrow x \neg F^E x, \\ \psi_3 &=_{def} @_{root} G^{E^*} \downarrow x @_{root} G^{E^*} \downarrow y @_{root} G^{E^*} \downarrow z (\bigvee_{e \in E} @_y \langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z \langle e \rangle x \rightarrow @_y z), & \text{et} \\ ARBRE &=_{def} \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3. \end{aligned}$$

Preuve:

La preuve consiste en quatre étapes :

1. prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$ ,
2. Prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a2) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_2$ ,
3. Prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1) et (a3) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_3$ ,
4. Prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1), (a2) et (a3) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE$ .

**Première étape :** Prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$ .

$$\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$$

$$\text{ssi } (a1) \mathfrak{M} \models_{hm} \downarrow x @_{root} F^{E^*} x$$

$$\text{ssi } (a2) \text{ pour tout état } s \in S, \text{ pour toute valuation } g, \mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \downarrow x @_{root} F^{E^*} x$$

$$\text{ssi } (a3) \text{ pour tout état } s \in S, \text{ pour toute valuation } g, \mathfrak{M}, g', s \models_{hm} @_{root} F^{E^*} x \text{ avec } g' \stackrel{x}{\sim} g \text{ et } g'(x) = s$$

$$\text{ssi } (a4) \text{ pour tout état } s \in S, \text{ pour toute valuation } g, \mathfrak{M}, g', r \models_{hm} F^{E^*} x \text{ avec } g' \stackrel{x}{\sim} g \text{ et } g'(x) = s$$

$$\text{ssi } (a5) \text{ pour tout état } s \in S, \text{ pour toute valuation } g, \mathfrak{M}, g', r \models_{hm} F^E x \vee x \text{ avec } g' \stackrel{x}{\sim} g \text{ et } g'(x) = s$$

ssi <sup>(a6)</sup> pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}, g', r \models_{hm} x$  ou  $\mathfrak{M}, g', r \models_{hm} F^E x$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  $g'(x) = r$  ou  $\mathfrak{M}, g', r \models_{hm} F^E x$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  $s = r$  ou  $\mathfrak{M}, g', r \models_{hm} F^E x$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi <sup>(a7)</sup> pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  $s = r$  ou il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E+}$  et  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} x$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  $s = r$  ou il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E+}$  et  $g'(x) = s_1$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi pour tout état  $s \in S$ ,  $s = r$  ou il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E+}$  et  $s = s_1$

ssi pour tout état  $s \in S$ ,  $s = r$  ou il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(r, s) \in R^{E+}$ .

L'équivalence (a1) est obtenue d'après la définition de  $\psi_1$ . L'équivalence (a2) est obtenue d'après la définition de satisfaction globale. L'équivalence (a3) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (a4) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\textcircled{r}_{root}$ . L'équivalence (a5) est obtenue d'après la définition de l'opérateur  $F^{E*}$ . L'équivalence (a6) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\vee$ . L'équivalence (a7) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $F^E$ .

Nous venons de prouver que  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$  est équivalent à pour tout état  $s \in S$ ,  $s = r$  ou il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(r, s) \in R^{E+}$ . Notons cette propriété ( $\dagger$ ).

Supposons que  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$ . D'après ( $\dagger$ ), pour tout état  $s \in S$ ,  $s = r$  ou il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(r, s) \in R^{E+}$ . Donc, pour toute valuation, pour tout état  $s$  de  $Pre(\mathfrak{M})$ , soit  $s$  est la racine  $r$ , soit il existe un chemin non vide dans  $Pre(\mathfrak{M})$  allant de la racine  $r$  à  $s$ . Ceci signifie que pour toute valuation, pour tout état  $s$  de  $Pre(\mathfrak{M})$ , il existe un chemin (éventuellement vide) allant de la racine à  $s$ . Ceci correspond à dire que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait la propriété (a1).

Supposons maintenant que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait la propriété (a1). Ceci signifie que tous les états de  $Pre(\mathfrak{M})$  sont accessibles à partir de la racine  $r$ . Soit  $s$  un état de  $Pre(\mathfrak{M})$  (i.e. un état de  $S$ ). On peut distinguer deux cas complémentaires : soit  $s$  est la racine  $r$ , soit  $s$  est un état différent de la racine  $r$ . Dans le premier cas, il existe trivialement un chemin (vide) de  $r$  à  $s$ . Dans le second cas,  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait la propriété (a1) implique qu'il existe un chemin non vide de  $r$  à  $s$  dans  $Pre(\mathfrak{M})$ . Ceci signifie qu'il existe un chemin dans  $\mathfrak{M}$ , ne contenant que des étiquettes de  $E$  c'est à dire que  $(r, s) \in R^{E+}$ . Ces deux cas réunis nous permettent d'écrire que pour tout état  $s \in S$ ,  $s = r$  ou il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(r, s) \in R^{E+}$ . D'après ( $\dagger$ ), ceci est équivalent à  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$ .

**Deuxième étape :** Prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a2) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_2$ .

$\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_2$

ssi <sup>(b1)</sup>  $\mathfrak{M} \models_{hm} \downarrow x \neg F^E x$

ssi <sup>(b2)</sup> pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \downarrow x \neg F^E x$

ssi <sup>(b3)</sup> pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}, g', s \models_{hm} \neg F^E x$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi <sup>(b4)</sup> pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ , il n'existe pas d'état  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in R^{E+}$  et  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} x$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

- ssi pour tout état  $s \in S$ , il n'existe pas d'état  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in R^{E^+}$  et  $s_1 = s$   
ssi pour tout état  $s \in S$ ,  $s$  n'est pas atteignable de  $s$  par un chemin de non vide ne contenant que des arcs étiquetés par des étiquettes de  $E$   
ssi pour tout état  $s \in S$ ,  $s$  n'est pas atteignable de  $s$  par un chemin non vide dans  $Pre(\mathfrak{M})$   
ssi  $Pre(\mathfrak{M})$  ne contient pas de cycle  
ssi  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a2).

L'équivalence (b1) est obtenue d'après la définition de  $\psi_2$ . L'équivalence (b2) est obtenue d'après la définition de satisfaction globale. L'équivalence (b3) est obtenue d'après la définition de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (b4) est obtenue d'après la définition des opérateurs  $\neg$  et  $F^E$ .

**Troisième étape :** Prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1) et (a3) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_3$ .

Dans un premier temps, intéressons nous à la propriété  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_3$

$\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_3$

ssi (c1)  $\mathfrak{M} \models_{hm} @_{root}G^{E^*}\downarrow x @_{root}G^{E^*}\downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$

ssi (c2) pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  
 $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_{root}G^{E^*}\downarrow x @_{root}G^{E^*}\downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$

ssi (c3) pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ ,  
 $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} G^{E^*}\downarrow x @_{root}G^{E^*}\downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$

ssi (c4) pour toute valuation  $g$ ,  
 $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} G^{E^*}\downarrow x @_{root}G^{E^*}\downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$

ssi (c5) pour toute valuation  $g$ ,  
pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
 $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \downarrow x @_{root}G^{E^*}\downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$

ssi (c6) pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
 $\mathfrak{M}, g_1, s_1 \models_{hm} @_{root}G^{E^*}\downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$   
avec  $g_1 \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$

ssi (c7) pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
 $\mathfrak{M}, g_1, r \models_{hm} G^{E^*}\downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$   
avec  $g_1 \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$

ssi (c8) pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ ,  
 $\mathfrak{M}, g_1, s_2 \models_{hm} \downarrow y @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$   
avec  $g_1 \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$

ssi (c9) pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ ,  
 $\mathfrak{M}, g_2, s_2 \models_{hm} @_{root}G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$   
avec  $g_1 \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \stackrel{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$

ssi (c10) pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ ,  
 $\mathfrak{M}, g_2, r \models_{hm} G^{E^*}\downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y\langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z\langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$   
avec  $g_1 \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \stackrel{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$

- ssi <sup>(c11)</sup> pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
 $\mathfrak{M}, g_2, s_3 \models_{hm} \downarrow z ((\bigvee_{e \in E} @_y \langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z \langle e \rangle x) \rightarrow @_y z)$   
avec  $g_1 \overset{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \overset{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$
- ssi <sup>(c12)</sup> pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
 $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} (\bigvee_{e \in E} @_y \langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z \langle e \rangle x) \rightarrow @_y z$   
avec  $g_1 \overset{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \overset{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$  et  $g_3 \overset{z}{\sim} g_2$  et  $g_3(z) = s_3$
- ssi <sup>(c13)</sup> pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
 $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} \bigvee_{e \in E} @_y \langle e \rangle x \wedge \bigvee_{e \in E} @_z \langle e \rangle x$  implique  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} @_y z$   
avec  $g_1 \overset{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \overset{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$  et  $g_3 \overset{z}{\sim} g_2$  et  $g_3(z) = s_3$
- ssi <sup>(c14)</sup> pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
 $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} \bigvee_{e \in E} @_y \langle e \rangle x$  et  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} \bigvee_{e \in E} @_z \langle e \rangle x$   
implique  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} @_y z$   
avec  $g_1 \overset{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \overset{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$  et  $g_3 \overset{z}{\sim} g_2$  et  $g_3(z) = s_3$
- ssi <sup>(c15)</sup> pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
les deux conditions :  
– il existe une étiquette  $e_1 \in E$  telle que  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} @_y \langle e_1 \rangle x$  et  
– il existe une étiquette  $e_2 \in E$  telle que  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} @_z \langle e_2 \rangle x$   
impliquent  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} @_y z$ .  
Tout en sachant que  $g_1 \overset{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \overset{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$  et  $g_3 \overset{z}{\sim} g_2$  et  
 $g_3(z) = s_3$
- ssi <sup>(c16)</sup> pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
les deux conditions :  
– il existe une étiquette  $e_1 \in E$  telle que  $\mathfrak{M}, g_3, s_2 \models_{hm} \langle e_1 \rangle x$  et  
– il existe une étiquette  $e_2 \in E$ ,  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} \langle e_2 \rangle x$   
impliquent  $\mathfrak{M}, g_3, s_2 \models_{hm} z$ .  
Tout en sachant que  $g_1 \overset{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \overset{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$  et  $g_3 \overset{z}{\sim} g_2$  et  
 $g_3(z) = s_3$
- ssi pour tout état  $s \in S$ , pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
les deux conditions :  
– il existe une étiquette  $e_1 \in E$ ,  $\mathfrak{M}, g_3, s_2 \models_{hm} \langle e_1 \rangle x$  et  
– il existe une étiquette  $e_2 \in E$ ,  $\mathfrak{M}, g_3, s_3 \models_{hm} \langle e_2 \rangle x$   
impliquent  $s_2 = s_3$ .  
Tout en sachant que  $g_1 \overset{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \overset{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$  et  $g_3 \overset{z}{\sim} g_2$  et  
 $g_3(z) = s_3$
- ssi <sup>(c17)</sup> pour toute valuation  $g$ , pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E^*}$ ,  
pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E^*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E^*}$ , on a :  
les deux conditions :  
– il existe une étiquette  $e_1 \in E$  telle qu'il existe un état  $s_4 \in S$  tel que  $((s_2, s_4) \in r_{e_1}$   
et  $\mathfrak{M}, g_3, s_4 \models_{hm} x$ ), et

– il existe une étiquette  $e_2 \in E$  telle qu'il existe un état  $s_5 \in S$  tel que  $((s_3, s_5) \in r_{e_2}$   
 et  $\mathfrak{M}, g_3, s_5 \models_{hm} x$ )

impliquent  $s_2 = s_3$ .

Tout en sachant que  $g_1 \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g_1(x) = s_1$  et  $g_2 \stackrel{y}{\sim} g_1$  et  $g_2(y) = s_2$  et  $g_3 \stackrel{z}{\sim} g_2$  et  
 $g_3(z) = s_3$

ssi pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E*}$ ,

pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E*}$ , n a :

les deux conditions :

– il existe une étiquette  $e_1 \in E$  telle qu'il existe un état  $s_4 \in S$  tel que  $((s_2, s_4) \in r_{e_1}$   
 et  $s_4 = s_1$ ), et

– il existe étiquette  $e_2 \in E$  telle qu'il existe un état  $s_5 \in S$  tel que  $((s_3, s_5) \in r_{e_2}$  et  
 $s_5 = s_1$ )

impliquent  $s_2 = s_3$

ssi pour tout état  $s_1$  tel que  $(r, s_1) \in R^{E*}$ ,

pour tout état  $s_2$  tel que  $(r, s_2) \in R^{E*}$ , pour tout état  $s_3$  tel que  $(r, s_3) \in R^{E*}$ ,

les deux conditions :

– il existe une étiquette  $e_1 \in E$  telle que  $(s_2, s_1) \in r_{e_1}$ , et

– il existe une étiquette  $e_2 \in E$  telle que  $(s_3, s_1) \in r_{e_2}$

impliquent  $s_2 = s_3$

ssi pour tous états  $s_1, s_2$  et  $s_3$  de  $S$  atteignables de la racine  $r$  par un chemin éventuellement  
 vide ne contenant pas de référence, si  $s_2$  et  $s_3$  peuvent atteindre l'état  $s_1$  par une  
 étiquette de  $E$  alors  $s_2$  et  $s_3$  sont égaux

où  $R^{E*}$  est la fermeture réflexive transitive de  $R^E$ .

L'équivalence (c1) est obtenue d'après la définition de  $\psi_3$ . L'équivalence (c2) est obtenue  
 d'après la définition de satisfaction globale. L'équivalence (c3) est obtenue d'après la sé-  
 mantique de l'opérateur @. L'équivalence (c4) met en évidence le fait que, quelque soit  
 l'état "de départ"  $s$  considéré, la satisfaction est ramenée à une satisfaction en la racine  
 $r$  ne tenant pas compte de  $s$ . Dans ce cas particulier, la satisfaction globale est équiva-  
 lente à une satisfaction locale en  $r$ . L'équivalence (c5) est obtenue d'après la sémantique  
 de l'opérateur  $G^{E*}$ . L'équivalence (c6) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  
 $\downarrow$ . L'équivalence (c7) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur @. L'équivalence  
 (c8) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $G^{E*}$ . L'équivalence (c9) est obtenue  
 d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (c10) est obtenue d'après la séman-  
 tique de l'opérateur @. L'équivalence (c11) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  
 $G^{E*}$ . L'équivalence (c12) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence  
 (c13) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\rightarrow$ . L'équivalence (c14) est obtenue  
 d'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$ . L'équivalence (c15) est obtenue d'après la séman-  
 tique de l'opérateur  $\vee$ . L'équivalence (c16) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  
 @. L'équivalence (c17) est obtenue d'après la sémantique des opérateurs  $\langle e_1 \rangle$  et  $\langle e_2 \rangle$ .

Nous venons de prouver que  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_3$  est équivalent à : pour tous états  $s_1, s_2$  et  $s_3$   
 de  $S$  atteignables de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide ne contenant pas de  
 référence, si  $s_2$  et  $s_3$  peuvent atteindre un état  $s_1$  par une étiquette de  $E$  alors  $s_2$  et  $s_3$  sont  
 égaux. Notons cette propriété ( $\dagger$ ).

Supposons que  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_3$ . D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$ ,  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$  et  
 $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_3$ . D'après ( $\dagger$ ), pour tous états  $s_1, s_2$  et  $s_3$  de  $S$  atteignables de la racine  $r$  par un

chemin éventuellement vide ne contenant pas de référence, si  $s_2$  et  $s_3$  peuvent atteindre un état  $s_1$  par une étiquette de  $E$  alors  $s_2$  et  $s_3$  sont égaux. Or,  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$  et donc, d'après la première étape de la preuve,  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1) c'est-à-dire que tous les états de  $Pre(\mathfrak{M})$  sont accessibles à partir de la racine  $r$ . Ainsi, pour tous états  $s_1, s_2$  et  $s_3$  de  $S$ , si  $s_2$  et  $s_3$  peuvent atteindre un état  $s_1$  par une étiquette de  $E$  alors  $s_2$  et  $s_3$  sont égaux. Et donc, pour tous états  $s_1, s_2$  et  $s_3$  de  $S$ , si  $s_2$  et  $s_3$  sont prédécesseurs de  $s_1$  dans  $Pre(\mathfrak{M})$  alors  $s_2$  et  $s_3$  sont égaux. Ce qui signifie que pour tout état  $s_1$  de  $S$ ,  $s_1$  a au plus un prédécesseur dans  $Pre(\mathfrak{M})$ . Le graphe de données  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait donc (a3).

Supposons maintenant que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1) et (a3). D'après la première étape,  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1$ .  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a3) donc pour tout état  $s_1$  de  $S$ ,  $s_1$  a au plus un prédécesseur dans  $Pre(\mathfrak{M})$ . Ceci est équivalent à dire que pour tous états  $s_1, s_2$  et  $s_3$  de  $S$ , si  $s_2$  et  $s_3$  sont prédécesseurs de  $s_1$  dans  $Pre(\mathfrak{M})$  alors  $s_2$  et  $s_3$  sont égaux. D'après (a1),  $s_1, s_2$  et  $s_3$  sont accessibles de la racine dans  $Pre(\mathfrak{M})$ . On peut alors déduire de (‡) que  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_3$ .

**Quatrième étape :** Prouver que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1), (a2) et (a3) ssi  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ .

Supposons que  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1), (a2) et (a3). D'après la troisième étape,  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_3$ . D'après la deuxième étape,  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_2$ . Et d'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$ ,  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ .

Supposons maintenant que  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$ . D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$ ,  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_1 \wedge \psi_3$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} \psi_2$ . D'après la troisième étape,  $Pre(\mathfrak{M})$  satisfait (a1) et (a3). D'après la deuxième étape, (a2). ■

## C Preuve du théorème 3 (énoncé à la page 19)

Avant de donner la preuve complète, nous décrivons sa structure générale.

La preuve consiste en deux étapes principales.

La première étape, notée *Étape I*, fait abstraction du typage des références et consiste à démontrer que le graphe de données  $\mathfrak{M}$  satisfait les conditions (i) et (ii) de la définition 7 si et seulement si  $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE \wedge TRAD_1(\mathcal{G})$ . La condition (i) est traitée par le Lemme 1.

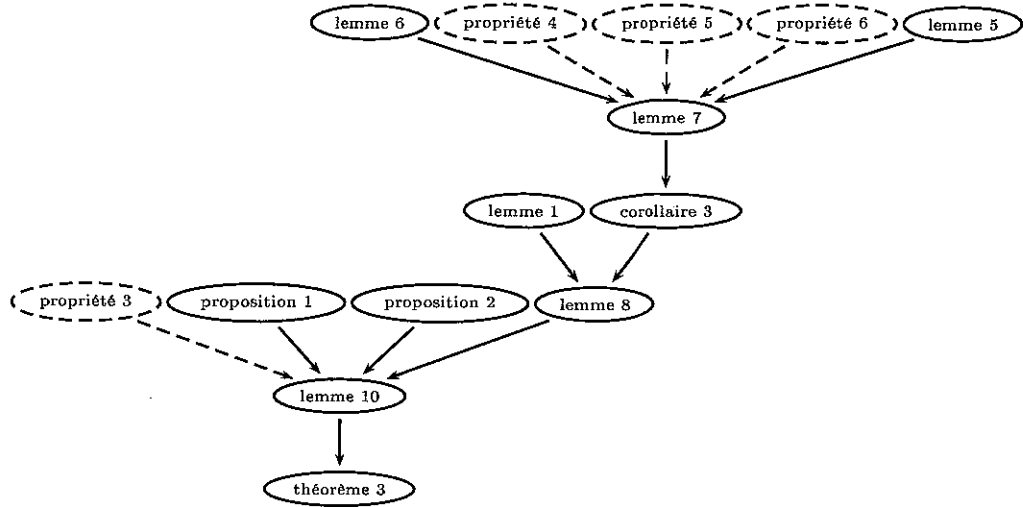
La deuxième étape, notée *Étape II*, complète la précédente évidemment en traitant le typage des références et en démontrant l'équivalence des deux énoncés suivants :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE \wedge TRAD_1(\mathcal{G})$  et  $\mathfrak{M}$  satisfait la condition (iii), et
- $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE \wedge TRAD_1(\mathcal{G}) \wedge TRAD_2(\mathcal{G})$ .

La preuve est assez complexe et nécessite d'énoncer et prouver quelques lemmes préliminaires.

Pour vous aider à vous repérer dans cette preuve, vous pouvez trouver à la figure C, un schéma décrivant les dépendances des lemmes, corollaires et propriétés entre eux (une flèche de A vers B indique que A est utilisé pour prouver B) :

Le premier lemme que nous prouvons ici, le lemme 5, exprime le fait que, dans le cas où  $Pre(\mathfrak{M})$  ne contient pas de cycle, la cardinalité des opérateurs apparaissant dans les motifs



Légende :  $\text{lemme A} \rightarrow \text{lemme B}$  signifie que le lemme A est utilisé pour prouver le lemme B.

$\text{propriété A}$  signifie que la propriété A est évidente et que sa preuve ne sera pas donnée dans la suite.

FIG. 6 – Dépendance des lemmes pour la preuve du théorème 3

“est bien traduite”.

Avant d’exposer ce lemme, observons la propriété suivante :

**Propriété 3 (Aucun arc ne pointe sur la racine)** Si  $Pre(\mathcal{M})$  est un arbre orienté de racine  $r$  et si  $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathcal{M}$  en la racine  $r$  alors aucun arc de  $(S)$  ne pointe sur  $r$ .

En fait, par définition (voir définition 4 page 11), une grammaire ne peut pas contenir un motif élémentaire de la forme  $(e\ Root)^{op}$ , ce qui empêche tout arc (et en particulier une référence) de pointer sur la racine.

**Lemme 5 (“Traduction” de la cardinalité des opérateurs  $+$ ,  $*$ ,  $!$  et  $?$ )** On se place dans le cas où  $\mathcal{M}$  est un graphe enraciné connexe et tel que  $Pre(\mathcal{M})$  ne contient pas de cycle. Soient  $L \subseteq \mathcal{E}$  un ensemble d’étiquettes,  $op$  un opérateur de cardinalité de  $\{+, *, !, ?\}$  et  $s$  un état de  $S$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- pour tout  $e \in L$ ,  $(e\ N)^{op}$  filtre  $\mathcal{M}$  en  $s$ ,
- quelque soit la valuation  $g$ ,  $\mathcal{M}, g, s \models_{hm} \psi_{op}(L)$  et pour tout  $e \in L \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathcal{M}$  en  $s_1$ ,

avec  $\psi_+(L) =_{def} \bigwedge_{e \in L} \langle e \rangle \top$ ,  
 $\psi_?(L) =_{def} \bigwedge_{e \in L} (\neg \langle e \rangle \top \vee (\downarrow_x \langle e \rangle \downarrow_y (\@_x[e]y)))$ ,  
 $\psi_*(L) =_{def} \top$ , et  
 $\psi_!(L) =_{def} (\downarrow_x \bigwedge_{e \in L} (\langle e \rangle \downarrow_y (\@_x[e]y)))$ .

*Esquisse de preuve :* Pour chaque opérateur  $op$  de  $\{+, *, !, ?\}$ , la preuve consiste à “dérouler” la sémantique de  $\mathcal{M}, g, s \models_{hm} \psi_{op}(L)$  et à en déduire que la sémantique de

$\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_{op}(L)$  est équivalente au respect de la cardinalité imposée par  $op$  sur le nombre d'arcs sortants de  $s$  étiquetés par l'étiquette  $e$ , et ceci pour chaque étiquette  $e$  de  $L$ .  $\square$

Preuve: Soit  $g$  une valuation quelconque.

Dans un premier temps, nous prouvons que pour  $op \in \{+, ?, *, !\}$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_{op}(L)$  si et seulement si pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \cong card(op)$ .

Nous traitons pour cela les différents cas correspondant aux valeurs possibles de  $op$ , c'est-à-dire les quatre cas  $op$  valant  $+$ ,  $?$ ,  $*$  et  $!$ .

(a) Dans le cas où  $op$  est l'opérateur de cardinalité  $+$  :

$\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_+(L)$  ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in L} \langle e \rangle \top$

ssi <sup>(a1)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \langle e \rangle \top$

ssi <sup>(a2)</sup> pour tout  $e \in L$ , il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$

ssi <sup>(a3)</sup> pour tout  $e \in L$ , il existe  $s_1 \in S$  tel que  $s_1 \in Out_e(s)$

ssi <sup>(a4)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| > 0$

ssi <sup>(a5)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \cong card(+)$

L'équivalence (a1) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\bigwedge$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a2) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\langle e \rangle$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (a3) est obtenue d'après la définition de  $Out_e(s)$  (voir section 3.1 page 13). L'équivalence (a4) est obtenue grâce au fait que "il existe  $s_1 \in S$  tel que  $s_1 \in Out_e(s)$ " est équivalent à " $Out_e(s)$  est non vide". L'équivalence (a5) est obtenue d'après la définition de  $|Out_e(s)| \cong card(+)$  (voir section 3.1 page 13).

(b) Dans le cas où  $op$  est l'opérateur de cardinalité  $?$  :

$\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_?(L)$  ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in L} \neg \langle e \rangle \top \vee (\downarrow x \langle e \rangle \downarrow y (\@_x[e]y))$

ssi <sup>(b1)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \neg \langle e \rangle \top$  ou  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} (\downarrow x \langle e \rangle \downarrow y (\@_x[e]y))$

ssi <sup>(b2)</sup> pour tout  $e \in L$ ,

il n'existe pas  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  ou  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} (\downarrow x \langle e \rangle \downarrow y (\@_x[e]y))$

ssi <sup>(b3)</sup> pour tout  $e \in L$ ,

il n'existe pas  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  ou  $\mathfrak{M}, g', s \models_{hm} \langle e \rangle \downarrow y (\@_x[e]y)$

avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi <sup>(b4)</sup> pour tout  $e \in L$ ,

il n'existe pas  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  ou

il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} \downarrow y (\@_x[e]y)$

avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$

ssi <sup>(b5)</sup> pour tout  $e \in L$ ,

il n'existe pas  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  ou

il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et  $\mathfrak{M}, g'', s_1 \models_{hm} \@_x[e]y$

avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$  et  $g'' \overset{x}{\sim} g'$  et  $g''(y) = s_1$

ssi <sup>(b6)</sup> pour tout  $e \in L$ ,

il n'existe pas  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  ou

il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et  $\mathfrak{M}, g'', s \models_{hm} [e]y$

avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$  et  $g'' \overset{x}{\sim} g'$  et  $g''(y) = s_1$



- ssi <sup>(b7)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  
 il n'existe pas  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  ou  
 il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et pour tout état  $s_2$  tel que  $(s, s_2) \in r_e$   
 $\mathfrak{M}, g'', s_2 \models_{hm} y$   
 avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$  et  $g'' \overset{x}{\sim} g'$  et  $g''(y) = s_1$
- ssi <sup>(b8)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  
 il n'existe pas  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  ou  
 il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et pour tout état  $s_2$  tel que  $(s, s_2) \in r_e$ ,  $s_2 = s_1$
- ssi <sup>(b9)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| = 0$  ou  $|Out_e(s)| = 1$
- ssi <sup>(b10)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \cong card(?)$

L'équivalence (b1) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\vee$ . L'équivalence (b2) est obtenue d'après la sémantique des opérateurs  $\neg$  et  $\langle e \rangle$ . L'équivalence (b3) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (b4) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\langle e \rangle$ . L'équivalence (b5) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (b6) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $@_x$ . L'équivalence (b7) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $[e]$ . L'équivalence (b8) est obtenue d'après la sémantique des variables d'état  $x$  et  $y$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (b9) est obtenue d'après la définition de  $Out_e(s)$  (voir section 3.1 page 13). L'équivalence (b10) est obtenue d'après la définition de  $|Out_e(s)| \cong card(?)$  (voir section 3.1 page 13).

- (c) Dans le cas où  $op$  est l'opérateur de cardinalité  $*$  :  
 D'une part,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_*(L)$  ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in L} \top$  car ceci est trivialement vrai.  
 D'autre part, pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \cong card(*)$  est équivalent à pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \geq 0$ , qui est également trivialement vrai.
- (d) Dans le cas où  $op$  est l'opérateur de cardinalité ! :  
 $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_!(L)$  ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} (\downarrow x \bigwedge_{e_1 \in \mathcal{E}_1} (\langle e_1 \rangle \downarrow y (@_x[e_1]y)))$
- ssi <sup>(d1)</sup>  $\mathfrak{M}, g', s \models_{hm} \bigwedge_{e_1 \in \mathcal{E}_1} (\langle e_1 \rangle \downarrow y (@_x[e_1]y))$  avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$
- ssi <sup>(d2)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $\mathfrak{M}, g', s \models_{hm} \langle e \rangle \downarrow y (@_x[e]y)$  avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$
- ssi <sup>(d3)</sup> pour tout  $e \in L$ , il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et  $\mathfrak{M}, g', s_1 \models_{hm} \downarrow y (@_x[e]y)$   
 avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$
- ssi <sup>(d4)</sup> pour tout  $e \in L$ , il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et  $\mathfrak{M}, g'', s_1 \models_{hm} @_x[e]y$   
 avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$  et  $g'' \overset{x}{\sim} g'$  et  $g''(y) = s_1$
- ssi <sup>(d5)</sup> pour tout  $e \in L$ , il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et  $\mathfrak{M}, g'', s \models_{hm} [e_1]y$   
 avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$  et  $g'' \overset{x}{\sim} g'$  et  $g''(y) = s_1$
- ssi <sup>(d6)</sup> pour tout  $e \in L$ , il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et, pour tout  $s_2 \in S$  tel que  
 $(s, s_2) \in r_e$   $\mathfrak{M}, g'', s_2 \models_{hm} y$   
 avec  $g' \overset{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s$  et  $g'' \overset{x}{\sim} g'$  et  $g''(y) = s_1$
- ssi <sup>(d7)</sup> pour tout  $e \in L$ , il existe  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$  et, pour tout  $s_2 \in S$  tel que  
 $(s, s_2) \in r_e$   $s_2 = s_1$
- ssi pour tout  $e \in L$ , il existe un et un seul état  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$
- ssi <sup>(d8)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| = 1$
- ssi <sup>(d9)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \cong card(!)$

L'équivalence (d1) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (d2) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$ . L'équivalence (d3) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\langle e \rangle$ . L'équivalence (d4) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ . L'équivalence (d5) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $@_x$ . L'équivalence (d6) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $[e_1]$ . L'équivalence (d7) est obtenue d'après la sémantique des variables d'état  $x$  et  $y$ . L'équivalence (d8) est obtenue d'après la définition de  $Out_e(s)$  (voir section 3.1 page 13). L'équivalence (d9) est obtenue d'après la définition de  $|Out_e(s)| \cong card(!)$  (voir section 3.1 page 13).

Nous venons donc de prouver que pour  $op \in \{+, *, ?, !\}$   $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_{op}(L)$  si et seulement si pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \cong card(op)$ . Notons cette propriété ( $\clubsuit$ ).

Nous pouvons maintenant écrire que :  
pour tout  $e \in L$ ,  $(e N)^{op}$  filtre  $\mathfrak{M}$  en  $s$

ssi <sup>(e1)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  
- si  $e \in E$  alors  $|Out_e(s)| \cong card(op)$  et pour tout  $s_1 \in S$  tel que  $s_1 \in Out_e(s)$ ,  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $s_1$   
- si  $e \in \overline{E}$  alors  $|Out_e(s)| \cong card(op)$

ssi pour tout  $e \in L$ ,  $|Out_e(s)| \cong (card(op))$  et  
pour tout  $e \in L \cap E$ , pour tout  $s_1 \in S$  tel que  $s_1 \in Out_e(s)$ ,  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $s_1$

ssi <sup>(e2)</sup> pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \psi_{op}(L)$  et  
pour tout  $e \in L \cap E$ , pour tout  $s_1 \in S$  tel que  $s_1 \in Out_e(s)$ ,  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $s_1$

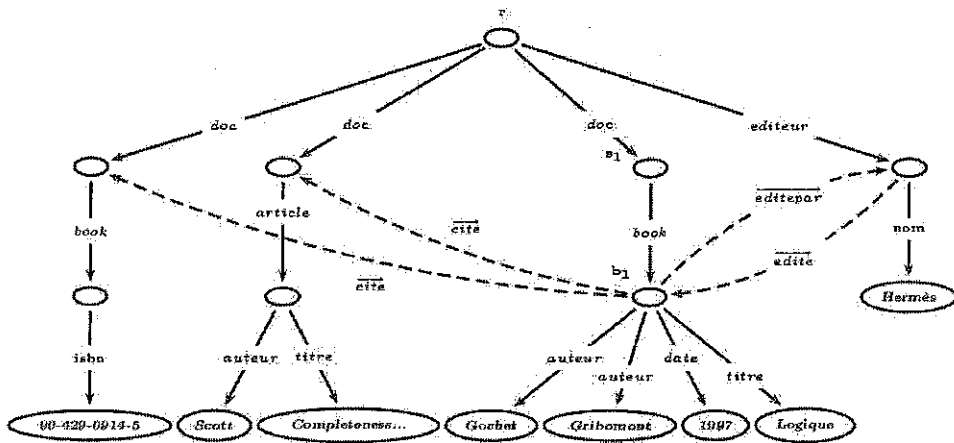
L'équivalence (e1) est obtenue d'après la définition de filtrage (définition 6 page 13). L'équivalence (e2) est obtenue d'après la propriété ( $\clubsuit$ ) démontrée précédemment. ■

Avant de poursuivre le preuve du théorème 3, nous avons besoin d'une nouvelle définition.

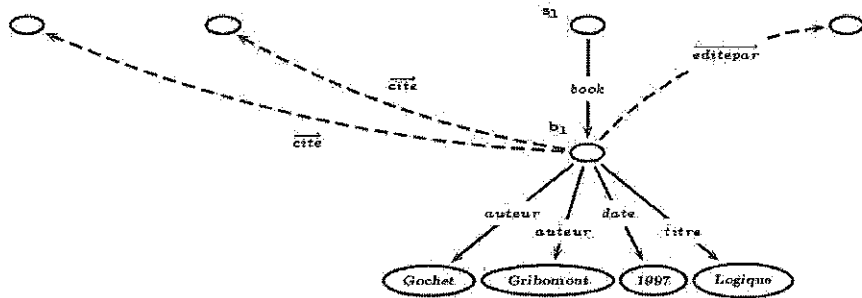
**Définition 11 (Sous-graphe principal engendré par  $s$ )** Soit  $(S, r, R, V)$  un graphe enraciné orienté étiqueté sur les arcs, noté  $\mathfrak{M}$ . Soit un état  $s$ , élément de  $S$ , on définit le sous-graphe principal engendré par  $s$ , noté  $\mathfrak{M}/_s$  comme étant  $(S/_s, s, R/_s, V/_s)$  i.e. le sous graphe de  $\mathfrak{M}$  enraciné en  $s$  tel que

- $S/_s$  est le sous ensemble de  $S$  correspondant aux états accessibles de  $s$  dans  $\mathfrak{M}$  par un chemin non vide de la forme  $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n$  tel que pour tout  $i \in [1..n-1]$ ,  $e_i \in E$  et  $e_n \in \mathcal{E}$ ,
- $R/_s$  est la restriction des relations de  $R$  aux états de  $S/_s$ , et
- $V/_s$  est la restriction de  $V$  aux états de  $S/_s$ .

Par exemple, si  $\mathfrak{M}$  est le modèle associé à l'exemple courant 1 et distinguons un état  $s_1$  :



alors,  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  est

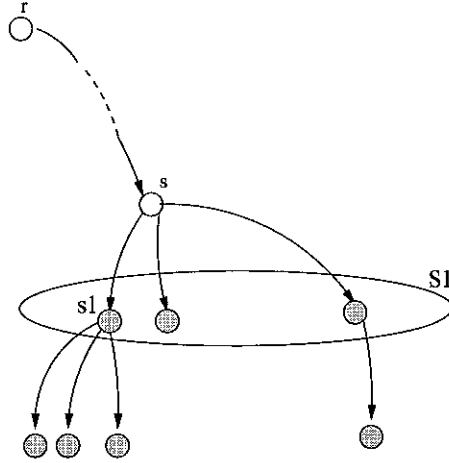


**Définition 12** ( $Acc_E(\mathfrak{M}_{/s})$ ) Soit  $s \in S$ .  $Acc_E(\mathfrak{M}_{/s})$  est l'ensemble des états accessibles de  $s$  dans  $\mathfrak{M}_{/s}$ , par un chemin non vide de la forme  $e_1, \dots, e_n$  tel que pour tout  $i \in [1..n]$ ,  $e_i \in E$ .

Les trois propriétés suivantes (les propriétés 4, 5 et 6) découlent de façon assez évidente des deux dernières définitions (définitions 11 et 12).

**Propriété 4** Soit  $s \in S$ . Soit  $S_1$  l'ensemble des états accessibles de  $s$  dans  $\mathfrak{M}$  par un arc étiqueté par  $e \in E$  (c'est-à-dire  $S_1 = \{s_1 \in S \mid (s, s_1) \in r_e \text{ avec } e \in E\}$ ). Alors  $\bigcup_{s_1 \in S_1} Acc_E(\mathfrak{M}_{/s_1}) \cup S_1 = Acc_E(\mathfrak{M}_{/s})$ .

La figure suivante illustre cette propriété :



**Propriété 5** Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle tel que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre orienté enraciné en  $r$ . Soit  $s$  un état de  $S$ . Soit  $s_1$  un état tel que  $(s, s_1) \in r_e$ . Soit  $expr$  un expression de motifs. On a :  $expr$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s_1$  si et seulement si  $expr$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_{s_1}$  en  $s_1$ .

La raison pour laquelle cette propriété est valable est la suivante. Comme  $expr$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s_1$  ne concerne que les états accessibles de  $\mathfrak{M}/_s$  à partir de  $s_1$  par un chemin ne contenant que des étiquettes de  $E$  et, éventuellement, une dernière étiquette référence, i.e. exactement tous les états de  $\mathfrak{M}/_{s_1}$ , alors, on a “ $expr$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s_1$ ” est équivalent à “ $expr$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_{s_1}$  en  $s_1$ ”.

Cette remarque permet d’établir aussi la propriété suivante :

**Propriété 6** Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle tel que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre orienté enraciné en  $r$ . Soit  $s$  un état de  $S$ . Soit  $s_1$  tel que  $s_1$  est accessible à partir de  $s$  dans  $Pre(\mathfrak{M})$ . Soit  $expr$  une expression de motifs.

$\mathfrak{M}/_s, s_1 \models_{hm} \tau_{expr}$  si et seulement si  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_{expr}$ . La définition de  $\tau_{expr}$  est la définition 8 page 17.

**Lemme 6** Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle de la logique multi-modale hybride et  $s \in S$  un état quelconque de  $\mathfrak{M}$ . Soit  $L$  en ensemble quelconque d’étiquettes. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- pour tout  $e \in L$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$
- quelque soit la valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in L} \neg \langle e \rangle \top$

*Esquisse de preuve :* La preuve de ce lemme découle directement de la sémantique de la formule  $\mathfrak{M}, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in L} \neg \langle e \rangle \top$  □

Preuve: Soit  $g$  un valuation quelconque.

$$\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in L} \neg \langle e \rangle \top$$

ssi <sup>(h1)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} \neg \langle e \rangle \top$

ssi <sup>(h2)</sup> pour tout  $e \in L$ , il n’existe pas d’état  $s_1 \in S$  tel que :  $(s, s_1) \in r_e$  et  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \top$

ssi pour tout  $e \in L$ , il n’existe pas d’état  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$

ssi <sup>(h3)</sup> pour tout  $e \in L$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

L'équivalence (h1) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (h2) est obtenue d'après la sémantique des opérateurs  $\neg$  et  $\langle e \rangle$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence (h3) est obtenue d'après la définition de  $Out_e(s)$ . ■

**Lemme 7 (Sous-graphe)** Soit  $\mathcal{G}$  une grammaire (voir définition 4 page 11). Soit  $N$  un symbole non terminal (voir section 3.1 page 10). Dans le cas où  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre orienté de racine  $r$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour tout  $s \in S$  :

- $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ ,
- quelque soit la valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}/_s, g, s \models_{hm} \tau_N$  et pour tout état  $s_1$  accessible de  $s$  par un chemin non vide dont le dernier arc est étiqueté par  $e \in E$ ,  $\mathfrak{M}/_s, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

On rappelle au lecteur que la définition de  $\tau_{Symb(e)}$  correspond à la définition 8 page 17 et que la notation de  $Expr(N)$  se trouve dans la section 3.1 page 12.

Note : Soit  $s \in S$ . Dans la preuve, nous allons appliquer le processus de filtrage à  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ . Or, si  $s$  n'est pas la racine  $r$ , alors  $Pre(\mathfrak{M}/_s)$  n'est pas forcément un arbre. Une question nous effleure alors l'esprit : "Peut-on appliquer le processus de filtrage à  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$  ?" On rappelle que le filtrage peut être appliqué à  $\mathfrak{M}/_s$  que si  $Pre(\mathfrak{M}/_s)$  est acyclique (voir 6 page 13). Le fait que  $Pre(\mathfrak{M})$  soit un arbre, garantit trivialement que  $Pre(\mathfrak{M}/_s)$  est acyclique. Ainsi, dans la suite, on tiendra compte du fait que si  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre alors, quelque soit  $s \in S$ , le processus de filtrage peut être appliqué à  $\mathfrak{M}/_s$  en sa racine  $s$ .

*Esquisse de preuve* : Ce lemme est le lemme principal de la preuve du théorème 3. La preuve est constituée de deux principales étapes que nous nommons (A) et (B). La première étape, l'étape (A), consiste à traiter les cas où  $Expr(N)$  est le motif vide ou un motif conjonctif. La seconde étape, l'étape (B), consiste à étendre la cas traité dans l'étape (A) à toute sorte de motif (c'est à dire traiter le cas du motif disjonctif). La première étape est la plus complexe et nécessite une induction sur la taille du plus court chemin de  $s$  à une feuille dans  $Pre(\mathfrak{M})$ . □

Preuve: Pour les besoins de la preuve, nous introduisons la notion de *profondeur à une feuille* d'un état.

**Définition (profondeur à une feuille d'un état)** Soit  $(S, r, R, V)$  un graphe enraciné orienté étiqueté sur les arcs, noté  $\mathfrak{M}$ . La profondeur à une feuille d'un état  $s \in S$ , notée  $prof(s)$  est la taille du plus court chemin de  $s$  à une feuille dans  $Pre(\mathfrak{M})$ .

Soit une expression de motifs  $Expr(N)$  et un état  $s \in S$ .

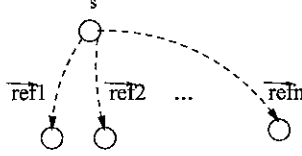
**(Étape (A))**  $Expr(N)$  est le motif vide  $\Lambda$  ou un motif conjonctif.

- (A1) Si  $s$  est une feuille dans  $Pre(\mathfrak{M})$  (i.e.  $prof(s) = 0$ ), alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ ,
  - pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}/_s, g, s \models_{hm} \tau_N$ .

**Remarque 1** Dans le cas présent c'est-à-dire le cas où  $prof(s) = 0$ ,  $s$  est une feuille dans  $Pre(\mathfrak{M})$ . Il n'existe donc pas d'état accessible à partir de  $s$  par un arc étiqueté par  $e \in E$ .

Sachant ceci, et d'après la définition de  $\mathfrak{M}/_s$ , il n'existe pas d'arc étiqueté par  $e$  de  $E$  dans  $\mathfrak{M}/_s$  et les seuls états accessibles à partir de  $s$  sont les états accessibles par une référence. Ainsi,  $S/_s$  est  $\{s\} \cup S'$  où  $S'$  est l'ensemble des états accessibles de  $s$  par une référence.

$\mathfrak{M}/_s$  est donc de la forme :



Soit  $g$  une valuation quelconque.

On distingue deux sous-cas correspondant à la forme de  $Expr(N)$ .

(A1).1.  $Expr(N)$  est  $\Lambda$ .

$\mathfrak{M}/_s, g, s \models_{hm} \tau_N$  où  $Expr(N)$  est  $\Lambda$

ssi  $(f1)$   $\mathfrak{M}/_s, g, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in \mathcal{E}} \neg \langle e \rangle \top$

ssi  $(f2)$  pour tout  $e \in \mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{M}/_s, g, s \models_{hm} \neg \langle e \rangle \top$

ssi  $(f3)$  pour tout  $e \in \mathcal{E}$ , il n'existe pas d'arc étiqueté par  $e$  dont l'origine est  $s$

ssi  $(f4)$  pour tout  $e \in \mathcal{E}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$

ssi  $(f5)$   $\Lambda$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ .

L'équivalence  $(f1)$  est issue de la définition de  $\tau_N$  (voir définition 8 page 17). L'équivalence  $(f2)$  est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\bigwedge$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence  $(f3)$  est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\langle e \rangle$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence  $(f4)$  est obtenue d'après le lemme 6 page 42. L'équivalence  $(f5)$  est obtenue d'après la définition de filtrage stricte (définition 6 page 13) dans le cas où l'expression filtrante est  $\Lambda$ .

(A1).2.  $Expr(N)$  est un motif conjonctif.

Dans ce cas,  $Expr(N)$  est de la forme  $(e_1 N_1)^{op_1}, \dots, (e_j N_j)^{op_j}$  où  $j > 0$ . Soit  $\mathcal{E}_+ = \{e \mid (e N)^+ \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $\mathcal{E}_* = \{e \mid (e N)^* \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $\mathcal{E}_! = \{e \mid (e N)! \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $\mathcal{E}_? = \{e \mid (e N)? \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $E_{Expr(N)} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_* \cup \mathcal{E}_! \cup \mathcal{E}_?$  ( $E_{Expr(N)}$  est l'ensemble des étiquettes apparaissant dans  $Expr(N)$ ).

(A1).2.a. **Implication " $\Rightarrow$ "**

Supposons que  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ .

D'après la définition de " $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ ", on sait que pour tout  $k \in [1..j]$   $(e_k N_k)^{op_k}$  filtre  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$  et, pour tout  $e \in E - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Donc, pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est  $+$ ,  $(e_k N_k)^+$  filtre  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$

et pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est  $*$ ,  $(e_k N_k)^*$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$   
et pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est  $!$ ,  $(e_k N_k)!$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$   
et pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est  $?$ ,  $(e_k N_k)?$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$   
et pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Donc, pour toute étiquette  $e_k \in \mathcal{E}_+$ ,  $(e_k N_k)^+$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$   
et pour toute étiquette  $e_k \in \mathcal{E}_*$ ,  $(e_k N_k)^*$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$   
et pour toute étiquette  $e_k \in \mathcal{E}_!$ ,  $(e_k N_k)!$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$   
et pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E}_?$ ,  $(e_k N_k)?$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$   
et pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Par hypothèse,  $Pre(\mathfrak{M})$  ne contient pas de cycle. Le graphe  $\mathfrak{M}/s$  étant un sous-graphe de  $\mathfrak{M}$ ,  $Pre(\mathfrak{M}/s)$  ne contient pas non plus de cycle. Le lemme 5 page 37 peut donc être appliqué à  $\mathfrak{M}/s$  dans les quatre cas correspondant aux quatre opérateurs. Dans la suite, on reprend les notations  $\psi+$ ,  $\psi*$ ,  $\psi!$  et  $\psi?$  introduites dans ce lemme 5 page 37. Ainsi,

$\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi+(\mathcal{E}_+)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_+ \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$  et,

$\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi*(\mathcal{E}_*)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_* \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$  et,

$\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_! \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$  et,

$\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_? \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$  et,

pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Ceci peut se réécrire de la façon suivante (pour la définition de  $\psi$ , voir lemme 5 page 37) :

$\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi+(\mathcal{E}_+)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi*(\mathcal{E}_*)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$   
et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$

et pour toute étiquette  $e$  de  $(\mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_* \cup \mathcal{E}_! \cup \mathcal{E}_?) \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$

et pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

D'après le lemme 6 page 42 appliqué à la proposition "pour tout  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ ", nous pouvons déduire les deux propriétés suivantes :

(a)  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi+(\mathcal{E}_+)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi*(\mathcal{E}_*)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$   
et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$ , et et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top$

(b) pour toute étiquette  $e$  de  $E_{Expr(N)} \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$  de la logique multi-modale

hybride, la propriété (a) est équivalente à :

$$\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \tau_+(\mathcal{E}_+) \wedge \psi^*(\mathcal{E}_*) \wedge \psi!(\mathcal{E}_!) \wedge \psi?(\mathcal{E}_?) \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top.$$

Ce qui, d'après la définition de  $\tau_N$ , est équivalent à  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \tau_N$

(A1).2.b. **Implication “ $\Leftarrow$ ”**

Supposons que  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \tau_N$ .

D'après la définition de  $\tau_N$ ,  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \tau_+ \wedge \psi^* \wedge \psi! \wedge \psi? \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$  de la logique multi-modale hybride,

$\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi+$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi^*$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi!$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi?$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top$ .

D'après le lemme 6 page 42,  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi+$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi^*$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi!$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi?$

et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Le lemme 5 page 37 peut être appliqué dans les quatre cas des opérateurs et nous permet d'obtenir que pour tout  $e_i \in E_{Expr(N)}$ ,  $(e_i N_i)^{op_i}$  filtre  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s$ . Et donc que pour tout  $i \in [1..j]$ ,  $(e_i N_i)^{op_i}$  filtre  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s$ .

Comme nous avons déduit plus haut que quelque soit l'étiquette  $e$  de  $\mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ , on peut déduire de la définition de filtrage stricte que  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s$ .

(A2)  $s$  n'est pas une feuille dans  $Pre(\mathfrak{M})$  (i.e.  $prof f(s) = n + 1$  avec  $n \geq 0$ ), et pour tout état  $s_1$  accessible de  $s$  par une chemin non vide dans  $Pre(\mathfrak{M})$ , la condition suivante est satisfaite :

(COND) Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $Expr(M)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  en  $s_1$ ,
- $\mathfrak{M}_{/s_1}, s_1 \models \tau_M$  et, pour tout état  $s_2$  accessible de  $s_1$  dans  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  par un chemin dont le dernier arc est étiqueté par  $e \in E$ , on a  $\mathfrak{M}_{/s_1}, g, s_2 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$

alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s$ ,
- pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}_{/s}, g, s \models_{hm} \tau_N$  et pour tout état  $s_1$  accessible de  $s$  par un chemin dont le dernier arc étiqueté par  $e \in E$ , on a  $\mathfrak{M}_{/s}, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

**Remarque 2** Nous notons que d'après la définition de  $Pre(\mathfrak{M})$  et parce que  $prof f(s) > 0$ , il existe forcément, dans  $Pre(\mathfrak{M})$ , un état accessible à partir de  $s$  par un arc étiqueté par une étiquette de  $E$ . Sachant ceci et d'après la définition de  $\mathfrak{M}_{/s}$ , il existe forcément un état accessible à partir de  $s$  par un arc étiqueté par  $e \in E$  dans  $\mathfrak{M}_{/s}$ . Donc, dans  $\mathfrak{M}_{/s}$ , il existe  $e \in E$  et  $s_1 \in S_{/s}$  tel que  $s_1 \in Out_e(s)$ .

(A2).1.  $Expr(N)$  est le motif vide  $\Lambda$ .

(A2).1.a. **Implication “ $\Rightarrow$ ”** : Supposons que  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s$ . D'après la définition de “ $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s$ ”, on



sait que pour tout  $e \in E$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ . Or, ceci est faux d'après la remarque 2 page ci-contre (il existe  $e \in E$  et  $s_1 \in S/s$  tel que  $s_1 \in Out_e(s)$  et donc  $Out_e(s) \neq \emptyset$ ). L'implication est donc vraie.

(A2).1.b. **Implication “ $\Leftarrow$ ”** : Supposons que  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \tau_N$  et que pour tout arc de  $\mathfrak{M}/s$  étiqueté par  $e \in E$ , dont l'état destination est  $s_1 \in S/s$ ,  $\mathfrak{M}/s, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ . D'après la définition de  $\tau_N$ ,  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \tau_N$  implique  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in E} \neg(e) \top$ . D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$  de la logique multi-modale hybride, on peut déduire que pour tout  $e \in E$ ,  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \neg(e) \top$ . Et d'après la sémantique de l'opérateur  $\langle e \rangle$  de la logique multi-modale hybride, pour tout  $e \in E$ , il n'existe pas d'arc étiqueté par  $e$  dont l'origine est  $s$ . Ceci est faux d'après la remarque 2 page précédente.

(A2).2. *Expr(N)* est un motif conjonctif.

Dans ce cas, *Expr(N)* est de la forme  $(e_1 N_1)^{op_1}, \dots, (e_j N_j)^{op_j}$  où  $j > 0$ . Soit  $\mathcal{E}_+ = \{e \mid (e N)^+ \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $\mathcal{E}_* = \{e \mid (e N)^* \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $\mathcal{E}_! = \{e \mid (e N)! \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $\mathcal{E}_? = \{e \mid (e N)? \text{ apparaît dans } Expr(N)\}$ , soit  $E_{Expr(N)} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_* \cup \mathcal{E}_! \cup \mathcal{E}_?$  ( $E_{Expr(N)}$  est l'ensemble des étiquettes apparaissant dans *Expr(N)*).

(A2).2.a. **Implication “ $\Rightarrow$ ”**

Supposons que *Expr(N)* filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$ .

Nous allons montrer que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(C1)  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \tau_N$ ,

(C2) pour tout arc de  $\mathfrak{M}/s$  étiqueté par  $e \in E$ , dont l'état destination est  $s_1 \in S/s$ ,  $\mathfrak{M}/s, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$

La suite est constituée de deux étapes correspondant respectivement aux preuves de (C1) et (C2).

Première étape : prouver que (C1) est vérifiée.

D'après la définition de “*Expr(N)* filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$ ”, on sait que pour tout  $k \in [1..j]$   $(e_k N_k)^{op_k}$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et, pour tout  $e \in E - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Donc, pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est +,  $(e_k N_k)^+$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est \*,  $(e_k N_k)^*$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est !,  $(e_k N_k)!$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour tout  $k \in [1..j]$  tel que  $op_k$  est ?,  $(e_k N_k)?$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour toute étiquette  $e \in E - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Donc, pour toute étiquette  $e_k \in \mathcal{E}_+$ ,  $(e_k N_k)^+$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour toute étiquette  $e_k \in \mathcal{E}_*$ ,  $(e_k N_k)^*$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour toute étiquette  $e_k \in \mathcal{E}_!$ ,  $(e_k N_k)!$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E}_?$ ,  $(e_k N_k)?$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$  et pour toute étiquette  $e \in E - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Par hypothèse,  $Pre(\mathfrak{M})$  ne contient pas de cycle. Le graphe  $\mathfrak{M}_{/s}$  étant un sous-graphe de  $\mathfrak{M}$ ,  $Pre(\mathfrak{M}_{/s})$  ne contient pas non plus de cycle. Le lemme 5 page 37 peut donc être appliqué à  $\mathfrak{M}_{/s}$  dans les quatre cas correspondant aux quatre opérateurs. Ainsi,

$\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_+ \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s_1$  et,  
 $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi * (\mathcal{E}_*)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_* \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s_1$  et,  
 $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_! \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s_1$  et,  
 $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$  et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E}_? \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s_1$  et,  
pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Ceci peut se réécrire de la façon suivante :

$\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+)$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi * (\mathcal{E}_*)$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$   
et pour toute étiquette  $e$  de  $(\mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_* \cup \mathcal{E}_! \cup \mathcal{E}_?) \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s_1$   
et pour toute étiquette  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

**Remarque 3** Notons ici qu'aucun état de  $\mathfrak{M}_{/s}$  n'est accessible par un arc étiqueté par  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ . Cette remarque nous sera utile plus loin dans la preuve.

D'après le lemme 6 page 42 appliqué à la proposition "pour tout  $e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ ", nous pouvons déduire les deux propriétés suivantes :

- (a)  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+)$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi * (\mathcal{E}_*)$  et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$   
et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$ , et  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top$
- (b) pour toute étiquette  $e$  de  $E_{Expr(N)} \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  
 $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s_1$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$  de la logique multi-modale hybride, la propriété (a) est équivalente à :

$\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+) \wedge \psi * (\mathcal{E}_*) \wedge \psi!(\mathcal{E}_!) \wedge \psi?(\mathcal{E}_?) \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top$ .

Ce qui, d'après la définition de  $\tau_N$ , est équivalent à  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \tau_N$

Nous savons donc maintenant que  $\mathfrak{M}_{/s}, s \models_{hm} \tau_N$  : ceci correspond à (C1).

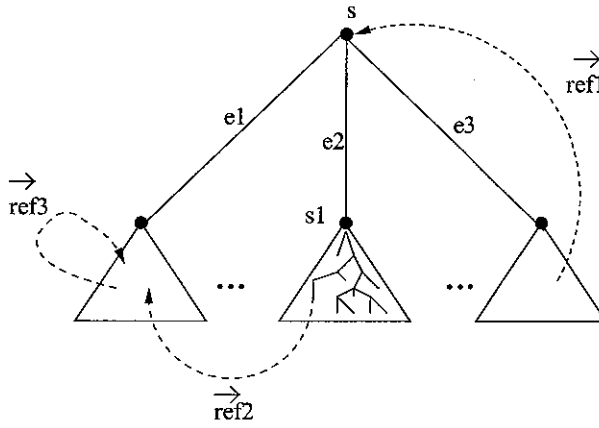
Seconde étape : prouver que (C2) est vérifiée.

D'après la propriété 5 page 42,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s}$  en  $s_1$  est équivalent à  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  en  $s_1$ .

On peut donc déduire de la propriété (b) que pour toute étiquette  $e$  de  $E_{Expr(N)} \cap E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  en  $s_1$

Plus haut dans la preuve, sous forme de la remarque 3 page précédente, nous avons pris le soin de faire remarquer au lecteur qu'aucun état de  $\mathfrak{M}_{/s}$  n'est accessible par un arc étiqueté par  $e \in E - E_{Expr(N)}$ . Cette remarque nous permet d'écrire que pour toute étiquette  $e$  de  $E$ , pour tout état  $s_1$  de  $Out_e(s)$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  en  $s_1$ .

En fait, "les états  $s_1$ " sont les états atteignables de  $s$  par une étiquette de  $E$ , ce qui peut être représenté par la figure suivante :



Dans un premier temps, raisonnons localement à "l'un des  $s_1$ ".

Soit  $s_1$  un état atteignable de  $s$  par une étiquette de  $E$ .

Par définition de  $prof$ ,  $prof(s_1) = n$ .

D'après (COND),

$\mathfrak{M}_{/s_1}, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$  et pour tout arc de  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  étiqueté par  $e \in E$  dont l'état destination est  $s_2 \in S_{/s_1}$ ,  $\mathfrak{M}_{/s_1}, s_2 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

D'après la propriété 6 page 42,  $\mathfrak{M}_{/s_1}, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$  est équivalent à  $\mathfrak{M}_{/s}, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Ainsi,  $\mathfrak{M}_{/s}, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$  et pour tout arc de  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  étiqueté par  $e \in E$  dont l'état destination est  $s_2 \in S_{/s_1}$ ,  $\mathfrak{M}_{/s}, s_2 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

On peut donc en déduire que pour tout état  $s_1$  atteignable de  $s$  par une étiquette de  $E$ ,  $\mathfrak{M}_{/s}, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$  et pour tout arc de  $\mathfrak{M}_{/s_1}$  étiqueté par  $e \in E$  dont l'état destination est  $s_2 \in S_{/s_1}$ ,  $\mathfrak{M}_{/s}, s_2 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Dans un deuxième temps, raisonnons par rapport à "tous les  $s_1$ ".

D'après la propriété 4 page 41,  $\bigcup_{s_1 \in S_1} Acc_E(\mathfrak{M}_{/s_1}) \cup S_1 = Acc_E(\mathfrak{M}_{/s})$   
Donc pour tout arc de  $\mathfrak{M}_{/s}$  étiqueté par  $e \in E$  dont l'état destination est  $s_2 \in S_{/s}$ ,  $\mathfrak{M}_{/s}, s_2 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Ce qui correspond à la condition (C2).

(A2).2.b. **Implication “ $\Leftarrow$ ”**

Supposons que

(1)  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \tau_N$ , et

(2) pour tout arc de  $\mathfrak{M}/s$  étiqueté par  $e \in E$ , dont l'état destination est  $s_1 \in S/s$ ,  $\mathfrak{M}/s, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Raisonnons tout d'abord sur (1).

D'après la définition de  $\tau_N$ ,  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+) \wedge \psi * (\mathcal{E}_*) \wedge \psi!(\mathcal{E}_!) \wedge \psi?(\mathcal{E}_?) \wedge \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$  de la logique multi-modale hybride,

$\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi * (\mathcal{E}_*)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$   
et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \bigwedge_{e \in \mathcal{E} - E_{Expr(N)}} \neg \langle e \rangle \top$ .

D'après le lemme 6 page 42,  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi * (\mathcal{E}_*)$   
et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$   
et pour toute étiquette  $e$  de  $\mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ .

Raisonnons maintenant sur (2).

Soit  $S_1$  l'ensemble des états accessibles de  $s$  par un arc étiqueté par  $e \in E$ .

Soit  $s_1 \in S_1$ . D'après (2), on a  $\mathfrak{M}/s, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$  et pour tout arc de  $\mathfrak{M}/s$  étiqueté par  $e \in E$  dont l'état destination est  $s_1 \in S/s$ ,  $\mathfrak{M}/s, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ . D'après la propriété 6 page 42,  $\mathfrak{M}/s_1, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$  et pour tout arc de  $\mathfrak{M}/s_1$  étiqueté par  $e \in E$  dont l'état destination est  $s_2 \in S/s_1$ ,  $\mathfrak{M}/s_1, s_2 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

D'après (COND),  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s_1$  en  $s_1$ . La propriété 5 page 42 nous permet d'obtenir :  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$ . On vient donc de démontrer que, pour tout état  $s_1 \in S_1$ ,  $Expr(Symb(e))$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s_1$ .

De plus, nous avons déduit plus haut que  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi + (\mathcal{E}_+)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi * (\mathcal{E}_*)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi!(\mathcal{E}_!)$  et  $\mathfrak{M}/s, s \models_{hm} \psi?(\mathcal{E}_?)$ . Le lemme 5 page 37 peut donc être appliqué dans les quatre cas des opérateurs et nous permet d'obtenir que pour tout  $e_i \in E_{Expr(N)}$ ,  $(e_i N_i)^{op_i}$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$ . Et donc que pour tout  $i \in [1..j]$ ,  $(e_i N_i)^{op_i}$  filtre  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$ .

Comme nous avons déduit plus haut que quelque soit l'étiquette  $e$  de  $\mathcal{E} - E_{Expr(N)}$ ,  $Out_e(s) = \emptyset$ , on peut déduire de la définition de filtrage stricte que  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/s$  en  $s$ .

**(Étape (B))  $Expr(N)$  est un motif quelconque.**

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ ,
- pour toute valuation  $g$ , on a  $\mathfrak{M}/_s, g, s \models_{hm} \tau_N$  et, pour tout état  $s_1$  accessible de  $s$  par un chemin dont le dernier arc est étiqueté par  $e \in E$ ,  $\mathfrak{M}/_s, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Nous distinguons ici les différentes formes que peut prendre  $Expr(N)$ . Pour les cas où  $Expr(N)$  est le motif vide ou un motif conjonctif, la preuve est donnée dans l'étape (A). Il ne nous reste plus qu'à traiter le cas du motif disjonctif. Dans ce cas,  $Expr(N)$  est de la forme  $expr_1 | \dots | expr_n$  où pour tout  $j \in [1..n]$ ,  $expr_j$  est un motif conjonctif contenant des motifs élémentaires ne faisant intervenir que des références.

Soit  $g$  une valuation quelconque.

$Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$  ssi il existe  $i \in [1..j]$  tel que  $expr_j$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ .

Soit ( $\spadesuit$ ) la propriété : "pour tout arc de  $\mathfrak{M}/_s$  étiqueté par  $e \in E$ , dont l'état destination est  $s_1 \in S/s$   $\mathfrak{M}/_s, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ "

Nous pouvons déduire que  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_N$  et ( $\spadesuit$ )

ssi ( $g^1$ )  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \bigvee_{i \in [1..j]} \tau_{expr_i}$  et ( $\spadesuit$ )

ssi ( $g^2$ )  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_{expr_1}$  ou  $\dots$  ou  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_{expr_j}$ , et ( $\spadesuit$ )

ssi ( $g^3$ )  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_{expr_1}$  et ( $\spadesuit$ ), ou  $\dots$ , ou  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_{expr_j}$  et ( $\spadesuit$ )

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $expr_i$  est un motif conjonctif tel que  $[expr_i] \leq n$  donc, d'après l'étape précédente,  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_{expr_1}$  et ( $\spadesuit$ ), ou  $\dots$ , ou  $\mathfrak{M}/_s, s \models_{hm} \tau_{expr_j}$  et ( $\spadesuit$ )

ssi  $\mathfrak{M}/_s$  filtre strictement  $expr_1$  en  $s$ , ou  $\dots$ , ou  $\mathfrak{M}/_s$  filtre strictement  $expr_n$  en  $s$

ssi  $\mathfrak{M}/_s$  filtre strictement l'un des  $expr_i$  en  $s$

ssi ( $g^4$ )  $Expr(N)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}/_s$  en  $s$ .

L'équivalence ( $g^1$ ) est obtenue d'après la définition de  $\tau_N$ . L'équivalence ( $g^2$ ) est obtenue d'après la sémantique de l'opérateur  $\vee$  de la logique multi-modale hybride. L'équivalence ( $g^3$ ) est obtenue par distribution de la conjonction. L'équivalence ( $g^4$ ) est obtenue d'après la définition de filtrage stricte. ■

**Corollaire 3** Soit  $(S, r, R, V)$  un graphe enraciné orienté étiqueté sur les arcs, noté  $\mathfrak{M}$ , et tel que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre enraciné en  $r$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$ ,
- pour toute valuation  $g$ , on a  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \tau_{Root}$  et pour tout état  $s_1$  accessible de  $r$  par un chemin dont le dernier arc est  $e \in E$ ,  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

*Esquisse de preuve* : La preuve de ce corollaire consiste en l'application du lemme 7 page 43 en la racine  $r$  de  $\mathfrak{M}$  avec  $N = Root$ . □

Preuve: Soit  $g$  une valuation quelconque. Par définition,  $\mathfrak{M}/_r$  est  $\mathfrak{M}$ . Ainsi, d'après le lemme 7, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$ ,
- $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \tau_{Root}$  et pour tout arc de  $\mathfrak{M}$  étiqueté par  $e \in E$ , dont l'état destination est  $s_1 \in S$   $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Le lemme suivant, c'est-à-dire le lemme 8, correspond à la conclusion de l'étape I, définie dans l'annexe C page 36. ■

**Lemme 8 (Preuve de l'étape I)** Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M}$  satisfait les conditions (i) et (ii) de la définition 7 page 14,
- $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_1(\mathcal{G})$ .

*Esquisse de preuve* : La preuve de ce lemme utilise le lemme 1 page 17 et le corollaire 3.  $\square$

Preuve:

**a. Implication “ $\Rightarrow$ ”**

Supposons que  $\mathfrak{M}$  satisfait les conditions (i) et (ii) de la définition 7 page 14. La condition (i) stipule que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre. La condition (ii) stipule que  $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$ .

Comme  $\mathfrak{M}$  satisfait la condition (i), on peut déduire du lemme 1 que  $\mathfrak{M} \models_{hm} arbre$ .

De plus, cette condition (i) stipule que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre orienté de racine  $r$ . Donc, d'après le corollaire 3, on a  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \tau_{Root}$  et, pour tout arc de  $\mathfrak{M}$  étiqueté par  $e \in E$  dont l'état destination est  $s_1 \in S$ ,  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$  où  $g$  est une valuation quelconque.

Comme  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre, tous les états de  $\mathfrak{M}$  sont accessibles à partir de  $r$  et donc, pour toute étiquette  $e \in E$ , pour tout état  $s \in S$  accessible à partir de  $r$  par un chemin éventuellement vide, pour tout état  $s_1 \in S$  tel que  $(s, s_1) \in r_e$ ,  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Ainsi, d'après la sémantique de l'opérateur  $[e]$  de la logique multi-modale hybride, on a : pour toute étiquette  $e \in E$ , pour tout état  $s \in S$  accessible à partir de  $r$  par un chemin éventuellement vide,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} [e]\tau_{Symb(e)}$ .

Ainsi, d'après la sémantique de l'opérateur  $G^*$  de la logique multi-modale hybride, pour toute étiquette  $e \in E$ , pour tout état  $s \in S$  accessible à partir de  $r$  par un chemin éventuellement vide,  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} G^*[e]\tau_{Symb(e)}$ .

Ainsi, d'après la sémantique de l'opérateur  $\bigwedge$  de la logique multi-modale hybride,  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \bigwedge_{e \in E} G^*[e]\tau_{Symb(e)}$ .

Toujours d'après la sémantique de l'opérateur  $\bigwedge$  la logique multi-modale hybride, et sachant que  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \tau_{Root}$ , on a :  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \tau_{Root} \bigwedge_{e \in E} G^*[e]\tau_{Symb(e)}$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $@$  de la logique multi-modale hybride, et sachant que  $I_{nom}(root) = r$ , ceci est équivalent à  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_{root}(\tau_{Root} \bigwedge_{e \in E} G^*[e]\tau_{Symb(e)})$  où  $s$  est un état quelconque.

Comme  $s$  est un état quelconque et  $g$  est une valuation quelconque, ceci correspond à la notion de satisfaction globale et signifie donc que  $\mathfrak{M} \models_{hm} @_{root}(\tau_{Root} \bigwedge_{e \in E} G^*[e]\tau_{Symb(e)})$  c'est-à-dire que  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_1(\mathcal{G})$ .

**b. Implication “ $\Leftarrow$ ”**

Supposons que  $\mathfrak{M} \models_{hm} arbre$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_1(\mathcal{G})$  où  $TRAD_1(\mathcal{G}) =_{def} @_{root}(\tau_{Root} \bigwedge_{e \in E} G^*[e]\tau_{Symb(e)})$ .

Comme  $\mathfrak{M} \models_{hm} arbre$ , on peut déduire du lemme 1 que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre. Donc  $\mathfrak{M}$  vérifie la condition (i) de la définition 7.

Soit  $g$  une valuation quelconque.

D'après la sémantique de l'opérateur  $\textcircled{\ast}$  de la logique multi-modale hybride, et sachant que  $I_{nom}(root) = r$ ,  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \tau_{Root} \wedge \bigwedge_{e \in E} G^*[e]_{\tau_{Symb(e)}}$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\wedge$  de la logique multi-modale hybride,  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \tau_{Root}$  et  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \bigwedge_{e \in E} G^*[e]_{\tau_{Symb(e)}}$ .

Toujours d'après la sémantique de cet opérateur, pour toute étiquette  $e \in E$ ,  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} G^*[e]_{\tau_{Symb(e)}}$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $G^*$  de la logique multi-modale hybride, pour toute étiquette  $e \in E$ , pour tout état  $s$  accessible à partir de  $r$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} [e]_{\tau_{Symb(e)}}$ .

Comme  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre et que tout état de  $\mathfrak{M}$  est un état de  $Pre(\mathfrak{M})$ , tous les états de  $\mathfrak{M}$  sont accessibles à partir de  $r$ , donc pour toute étiquette  $e \in E$ , pour tout état  $s \in S$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} [e]_{\tau_{Symb(e)}}$ .

D'après la définition de l'opérateur  $[e]$  de la logique multi-modale hybride, pour toute étiquette  $e \in E$ , pour tout état  $s \in S$ , tout état  $s_1 \in S$  accessible à partir de  $s$  par  $e$  est tel que  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

Ceci signifie que pour tout arc de  $\mathfrak{M}$  étiqueté par  $e \in E$ , dont l'état destination est un état  $s_1$  de  $S$ , on a  $\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} \tau_{Symb(e)}$ .

On peut donc déduire du corollaire 3 que  $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$ , ce qui correspond à la condition (ii) de la définition 7. ■

Commence ici la preuve de la seconde étape, l'étape II, de la preuve. On rappelle que la description des deux étapes se trouve dans l'annexe C page 36.

**Lemme 9** Soit  $(S, r, R, V)$  un graphe enraciné orienté étiqueté sur les arcs, noté  $\mathfrak{M}$ , et tel que  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre et  $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$ . Les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout état  $s$  accessible par  $\vec{e} \in \vec{E}$ ,  $Symb(\vec{e}) \in requis(s)$ ,
- pour tout état  $s$ , si  $s$  n'est pas accessible par  $\vec{e} \in \vec{E}$ , alors  $requis(s) = \emptyset$ ,
- pour tout état  $s$  accessible par  $e \in E$ ,  $marq(s) = \{Symb(e)\}$ .

Preuve: Étant donnée la définition de filtrage (définition 6 page 13), les deux premières conditions ci-dessus découlent trivialement.

Toujours d'après cette même définition, on sait que pour tout état  $s$  accessible par  $e \in E$ ,  $Symb(e) \in marq(s)$ . D'après les propriétés 1 et 2, on peut en déduire que pour tout état  $s$  accessible par  $e \in E$ ,  $marq(s) = \{Symb(e)\}$ . ■

**Lemme 10 (Preuve de l'étape II)** Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_1(\mathcal{G})$  et  $\mathfrak{M}$  satisfait la condition (iii) de la définition 7 page 14,
- $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_1(\mathcal{G})$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$ .

*Esquisse de preuve* : La preuve de ce théorème est composée de deux phases. La première phase consiste à "dérouler" la sémantique de la formule  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$  de façon à déduire une propriété qui lui est équivalente et que nous appellerons  $(\mp)$ . La seconde phase consiste à prouver l'équivalence des deux propositions suivantes,

- $\mathfrak{M}$  satisfait la condition (iii) de la définition 7 page 14, et
- $(\mp)$ .

□

Preuve:

Supposons que  $\mathfrak{M} \models_{hm} ARBRE$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_1(\mathcal{G})$ .

Nous allons prouver que  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$  est équivalent à la condition (iii).

**Première phase :**

Nous allons ici raisonner sur la sémantique de  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$

où  $TRAD_2(\mathcal{G}) =_{def} @_{root} \left( \bigwedge_{\vec{e} \in \vec{E}} G^*[\vec{e}] \downarrow x \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right) \right)$

$\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$  ssi pour tout état  $s \in S$  et pour toute valuation  $g$ ,  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$ .

Soit  $s$  un état quelconque de  $S$  et  $g$  une valuation quelconque.

$\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$

ssi  $\mathfrak{M}, g, s \models_{hm} @_{root} \left( \bigwedge_{\vec{e} \in \vec{E}} G^*[\vec{e}] \downarrow x \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right) \right)$

ssi  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} \bigwedge_{\vec{e} \in \vec{E}} G^*[\vec{e}] \downarrow x \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right)$

ssi pour toute  $\vec{e} \in \vec{E}$ ,  $\mathfrak{M}, g, r \models_{hm} G^*[\vec{e}] \downarrow x \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right)$

ssi pour toute  $\vec{e} \in \vec{E}$ , pour tout état  $s_1 \in S$  tel que  $s_1$  est accessible à partir de  $r$  par un chemin éventuellement vide,

$\mathfrak{M}, g, s_1 \models_{hm} [\vec{e}] \downarrow x \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right)$

ssi pour toute  $\vec{e} \in \vec{E}$ , pour tout état  $s_1 \in S$  tel que  $s_1$  est accessible à partir de  $r$  par un chemin éventuellement vide, pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $s_1$  par  $\vec{e}$

$\mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} \downarrow x \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right)$ .

Ceci peut se réécrire plus simplement sous la forme suivante :

Pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ ,

$\mathfrak{M}, g, s_2 \models_{hm} \downarrow x \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right)$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\downarrow$ , cette propriété est équivalente à :

Pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ ,

$\mathfrak{M}, g', s_2 \models_{hm} \left( \bigvee_{e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E} @_{root} F^*(e)x \right)$  avec  $g' \stackrel{x}{\sim} g$  et  $g'(x) = s_2$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\bigwedge$ , ceci est équivalent à :

Pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E$  telle que  $\mathfrak{M}, g', s_2 \models_{hm} @_{root} F^*(e)x$

D'après la sémantique de l'opérateur  $@_{root}$ , cette propriété équivaut à :

Pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E$  telle que

$\mathfrak{M}, g', r \models_{hm} F^*(e)x$

D'après la sémantique de l'opérateur  $F^*$ , cette propriété est équivalente à :

Pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E$  telle qu'il existe un état

$s_3 \in S$  accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide tel que  $\mathfrak{M}, g', s_3 \models_{hm} \langle e \rangle x$

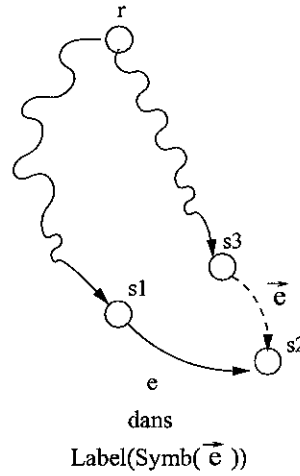


D'après la sémantique de l'opérateur  $\langle e \rangle$ , ceci équivaut à :

Pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in \text{Label}(\text{Symb}(\vec{e})) \cap E$  telle qu'il existe un état  $s_3 \in S$  accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide tel qu'il existe un état  $s_4 \in S$  accessible à partir de  $s_3$  par  $e$  et tel que  $\mathfrak{M}, g', s_4 \models_{hm} x$ .

D'après la sémantique de l'opérateur  $\langle e \rangle$  :

Pour tout état  $s_2$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in \text{Label}(\text{Symb}(\vec{e})) \cap E$  telle qu'il existe un état  $s_3 \in S$  accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide tel qu'il existe un état  $s_4 \in S$  accessible à partir de  $s_3$  par  $e$  et tel que  $s_4 = s_2$ .



Cette propriété, équivalente à  $\mathfrak{M} \models_{hm} \text{TRAD}_2(\mathcal{G})$ , sera appelée  $(\mp)$  dans la suite.

Il nous suffit donc maintenant de prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

–  $\mathfrak{M}$  satisfait la condition (iii) :

pour tout état  $s$  de  $S$ , si  $\text{requis}(s) \neq \emptyset$  alors  $\text{requis}(s) = \text{marq}(s)$  ;

–  $(\mp)$  :

pour tout état  $s$  accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in \text{Label}(\text{Symb}(\vec{e})) \cap E$  telle qu'il existe un état  $s_2 \in S$  accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide et tel que  $s_2$  est origine d'un arc étiqueté par  $e$  ayant pour destination  $s$ .

En fait, dans la suite, nous prouvons une propriété plus forte. Nous prouvons que pour tout état  $s \in S$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

– si  $\text{requis}(s) \neq \emptyset$  alors  $\text{requis}(s) = \text{marq}(s)$  ;

– si  $s$  est accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in \text{Label}(\text{Symb}(\vec{e})) \cap E$  telle qu'il existe un état  $s_2 \in S$  accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide et tel que  $s_2$  est origine d'un arc étiqueté par  $e$  ayant pour destination  $s$ .

Soit  $s \in S$ .

## Seconde phase :

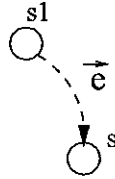
### 1. Implication " $\Rightarrow$ "

Supposons que  $s$  satisfait la condition *si*  $requis(s) \neq \emptyset$  alors  $requis(s) = marq(s)$ .

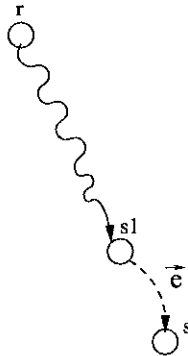
Comme  $\mathfrak{M} \models_{hm} arbre$  et  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_1(\mathcal{G})$ , on peut déduire du lemme 8 page 52 que  $\mathfrak{M}$  satisfait les conditions (i) et (ii) de la définition 7 page 14. Ceci implique que  $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$ .

Nous allons traiter deux cas de figures pour  $s$  :

- a. L'état  $s$  est tel qu'aucune référence de  $\mathfrak{M}$  n'a pour destination  $s$ .  
 $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$ , or, pour tout état  $s$  de  $S$ , la valeur de  $requis(s)$  est définie lors du processus de filtrage. Dans le cas où il n'existe pas de référence pointant sur  $s$ , donc,  $requis(s) = \emptyset$ . La propriété *Si*  $requis(s) \neq \emptyset$  alors  $requis(s) = marq(s)$  est donc trivialement vérifiée en  $s$ .
- b. Il existe une référence  $\vec{e}$  ayant pour destination  $s$ .  
D'après la définition de filtrage,  $requis(s) \neq \emptyset$  D'après le lemme 9 page 53,  $requis(s)$  contient au moins  $Symb(\vec{e})$ .  
Nommons  $s_1$  le l'état duquel est issu la référence  $Symb(\vec{e})$  ayant pour destination  $s$ .

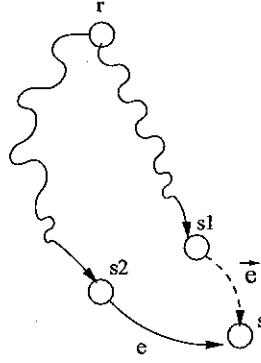


D'après les hypothèses de départ, la condition (i) est vérifiée par  $\mathfrak{M}$  et certifie que tous les états de  $\mathfrak{M}$  sont accessibles de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide. Donc, en particulier, l'état  $s_1$  est accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide. Nous pouvons donc en déduire que  $s$  est accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin dont le dernier arc est une référence.



$Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre donc il existe un chemin ne contenant que des étiquettes de  $E$  et menant à  $s$ . Comme une référence ne peut pas pointer sur la racine  $r$  (propriété 3 page 37), ce chemin est non vide. Donc, en particulier, il existe un chemin non vide allant de  $r$  à  $s$  et dont le dernier arc est étiqueté par  $e \in E$ .

Soit  $s_2$  l'avant-dernier état de ce chemin c'est-à-dire tel que  $s$  est accessible à partir de  $s_2$  par  $e \in E$ .



D'après le lemme 9 page 53, on a  $marq(s) = \{Symb(e)\}$ .

Or, d'après les hypothèses de départ, on a  $marq(s) = requis(s)$  et on a vu plus haut que  $Symb(\vec{e}) \in requis$  donc  $\{Symb(e)\} = \{Symb(\vec{e})\}$ . D'après la définition de  $Label(Symb(\vec{e}))$ , ceci signifie que  $e \in Label(Symb(\vec{e}))$

Nous pouvons donc en déduire qu'il existe un chemin non vide menant de  $r$  à  $s$  dont le dernier arc est une étiquette  $e \in E$  et telle que  $e \in Label(Symb(\vec{e}))$ .

On a donc prouvé que pour tout état  $s$  accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin dont le dernier arc est une référence, il existe un chemin non vide menant de  $r$  à  $s$  dont le dernier arc est une étiquette  $e \in E \cap Label(Symb(\vec{e}))$ .

Cette propriété est équivalente à  $(\mp)$  et donc à  $\mathfrak{M} \models_{hm} TRAD_2(\mathcal{G})$

## 2. Implication " $\Leftarrow$ "

Supposons que  $s$  satisfasse la condition suivante :

si  $s$  est accessible à partir de  $r$  par un chemin dont la dernière étiquette est  $\vec{e} \in \vec{E}$ , il existe une étiquette  $e \in Label(Symb(\vec{e})) \cap E$  telle qu'il existe un état  $s_2 \in S$  accessible à partir de la racine  $r$  par un chemin éventuellement vide et tel que  $s_2$  est origine d'un arc étiqueté par  $e$  ayant pour destination  $s$ .

Nous allons traiter deux cas de figures pour  $s$  :

- a. L'état  $s$  est tel qu'aucune référence de  $\mathfrak{M}$  n'a pour destination  $s$ .

D'après la définition de filtrage (définition 6 page 13),  $requis(s) = \emptyset$ .  $s$  vérifie donc trivialement la propriété suivante : si  $requis(s) \neq \emptyset$  alors  $requis(s) = marq(s)$ .

- b. Il existe une référence  $\vec{e}$  ayant pour destination  $s$ .

D'après la définition de filtrage (définition 6 page 13),  $requis(s) \neq \emptyset$ .

D'après le lemme 8 page 52,  $\mathfrak{M}$  satisfait les conditions (i) et (ii) de la définition 7 page 14.

Ainsi, d'après le lemme 9 page 53, " $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$  et il existe un arc référence  $\vec{e}$  entrant en  $s$ " implique que  $Symb(\vec{e}) \in requis(s)$ .

D'après ce même lemme, " $Expr(Root)$  filtre strictement  $\mathfrak{M}$  en  $r$  et il existe un arc référence  $e$  entrant en  $s$ " implique que  $marq(s) = \{Symb(e)\}$ . Comme  $e \in Label(Symb(\vec{e}))$ ,  $marq(s) = \{Symb(e)\} = \{Symb(\vec{e})\}$ .

Soit  $s$  tel que  $requis(s) \neq \emptyset$ . De façon à prouver que  $requis(s) = marq(s)$ , il va nous suffire de montrer que  $requis(s)$  contient au plus un élément. Nous allons faire cette petite démonstration par l'absurde. Supposons que l'ensemble  $requis(s)$  contienne deux éléments  $N_1$  et  $N_2$  avec  $N_1 \neq N_2$ .

D'après la définition de filtrage (définition 6 page 13), cela signifie qu'il existe un motif  $(\vec{e}_1 N_1)^{op_1}$  dans la grammaire et un autre motif  $(\vec{e}_2 N_2)^{op_2}$  tels que ces deux motifs filtrent  $\mathfrak{M}$  en  $s$ .

Il existe donc deux références  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  dont la destination est  $s$ .

Nous distinguons alors deux cas :

a.  $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ .

Ceci signifie qu'il existe un motif  $(\vec{e}_1 N_1)^{op_1}$  et un motif  $(\vec{e}_1 N_2)^{op_2}$  avec  $N_1 \neq N_2$  dans la grammaire  $\mathcal{G}$ . Or, ceci est contradictoire avec la définition de grammaire (définition 4 page 11), et plus précisément, la condition (ii) de cette définition n'est pas respectée.

b.  $\vec{e}_1 \neq \vec{e}_2$ .

D'après l'hypothèse de départ, il existe un arc étiqueté par  $e_1 \in Label(Symb(\vec{e}_1)) \cap E$  dont la destination est  $s$  et il existe un arc étiqueté par  $e_2 \in Label(Symb(\vec{e}_2)) \cap E$  dont la destination est  $s$ .

Si  $e_1 \neq e_2$ , ceci signifie qu'il existe deux arcs non référence dont la destination est  $s$ , ce qui contredit l'hypothèse  $Pre(\mathfrak{M})$  est un arbre.

Si  $e_1 = e_2$ , alors on a  $e_1 \in Label(Symb(\vec{e}_1))$  et  $e_2 \in Label(Symb(\vec{e}_2))$  avec  $Symb(\vec{e}_1) = N_1$  et  $Symb(\vec{e}_2) = N_2$ . D'après la définition de  $Label(e_1)$ , ceci signifie qu'il existe dans la grammaire  $\mathcal{G}$  deux motifs  $(e_1 N_1)$  et  $(e_1 N_2)$  avec  $N_1 \neq N_2$ . Or, ceci est contradictoire avec la condition ii de la définition de grammaire (définition 4 page 11).

■

# RAPPORTS INTERNES AU LRI - ANNEE 2003

N°	Nom	Titre	Nbre de pages	Date parution
1345	FLANDRIN E LI H WEI B	A SUFFICIENT CONDITION FOR PANCYCLABILITY OF GRAPHS	16 PAGES	01/2003
1346	BARTH D BERTHOME P LAFOREST C VIAL S	SOME EULERIAN PARAMETERS ABOUT PERFORMANCES OF A CONVERGENCE ROUTING IN A 2D-MESH NETWORK	30 PAGES	01/2003
1347	FLANDRIN E LI H MARCZYK A WOZNIAK M	A CHVATAL-ERDOS TYPE CONDITION FOR PANCYCLABILITY	12 PAGES	01/2003
1348	AMAR D FLANDRIN E GANCARZEWICZ G WOJDA A P	BIPARTITE GRAPHS WITH EVERY MATCHING IN A CYCLE	26 PAGES	01/2003
1349	FRAIGNIAUD P GAURON P	THE CONTENT-ADDRESSABLE NETWORK D2B	26 PAGES	01/2003
1350	FAIK T SACLE J F	SOME b-CONTINUOUS CLASSES OF GRAPH	14 PAGES	01/2003
1351	FAVARON O HENNING M A	TOTAL DOMINATION IN CLAW-FREE GRAPHS WITH MINIMUM DEGREE TWO	14 PAGES	01/2003
1352	HU Z LI H	WEAK CYCLE PARTITION INVOLVING DEGREE SUM CONDITIONS	14 PAGES	02/2003
1353	JOHNEN C TIXEUIL S	ROUTE PRESERVING STABILIZATION	28 PAGES	03/2003
1354	PETITJEAN E	DESIGNING TIMED TEST CASES FROM REGION GRAPHS	14 PAGES	03/2003
1355	BERTHOME P DIALLO M FERREIRA A	GENERALIZED PARAMETRIC MULTI-TERMINAL FLOW PROBLEM	18 PAGES	03/2003
1356	FAVARON O HENNING M A	PAIRED DOMINATION IN CLAW-FREE CUBIC GRAPHS	16 PAGES	03/2003
1357	JOHNEN C PETIT F TIXEUIL S	AUTO-STABILISATION ET PROTOCOLES RESEAU	26 PAGES	03/2003
1358	FRANOVA M	LA "FOLIE" DE BRUNELLESCHI ET LA CONCEPTION DES SYSTEMES COMPLEXES	26 PAGES	04/2003
1359	HERAULT T LASSAIGNE R MAGNIETTE F PEYRONNET S	APPROXIMATE PROBABILISTIC MODEL CHECKING	18 PAGES	01/2003
1360	HU Z LI H	A NOTE ON ORE CONDITION AND CYCLE STRUCTURE	10 PAGES	04/2003
1361	DELAET S DUCOURTHIAL B TIXEUIL S	SELF-STABILIZATION WITH r-OPERATORS IN UNRELIABLE DIRECTED NETWORKS	24 PAGES	04/2003
1362	YAO J Y	RAPPORT SCIENTIFIQUE PRESENTE POUR L'OBTENTION D'UNE HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES	72 PAGES	07/2003
1363	ROUSSEL N EVANS H HANSEN H	MIRRORSPACE : USING PROXIMITY AS AN INTERFACE TO VIDEO-MEDIATED COMMUNICATION	10 PAGES	07/2003

# RAPPORTS INTERNES AU LRI - ANNEE 2003

N°	Nom	Titre	Nbre de pages	Date parution
1364	GOURAUD S D	GENERATION DE TESTS A L'AIDE D'OUTILS COMBINATOIRES : PREMIERS RESULTATS EXPERIMENTAUX	24 PAGES	07/2003
1365	BADIS H AL AGHA K	DISTRIBUTED ALGORITHMS FOR SINGLE AND MULTIPLE-METRIC LINK STATE QoS ROUTING	22 PAGES	07/2003
1366	FILLIATRE J C	WHY : A MULTI-LANGUAGE MULTI-PROVER VERIFICATION TOOL	20 PAGES	09/2003
1367	FILLIATRE J C	A THEORY OF MONADS PARAMETERIZED BY EFFECTS	18 PAGES	09/2003
1368	FILLIATRE J C	HASH CONSING IN AN ML FRAMEWORK	14 PAGES	09/2003
1369	FILLIATRE J C	DESIGN OF A PROOF ASSISTANT : COQ VERSION 7	16 PAGES	09/2003
1370	HERMAN T TIXEUIL S	A DISTRIBUTED TDMA SLOT ASSIGNMENT ALGORITHM FOR WIRELESS SENSOR NETWORKS	32 PAGES	09/2003
1371	RIGAUX P SPYRATOS N	GENERATION AND SYNDICATION OF LEARNING OBJECT METADATA	32 PAGES	10/2003
1372	APPERT C BEAUDOUIN-LAFON M MACKAY W E	CONTEXT MATTERS : EVALUATING INTERACTION TECHNIQUES WITH THE CIS MODEL	14 PAGES	10/2003
1373	BLANCH R GUIARD Y BEAUDOUIN-LAFON M	SEMANTIC POINTING : IMPROVING TARGET ACQUISITION WITH CONTROL-DISPLAY RATIO ADAPTATION	12 PAGES	10/2003
1374	FORGE D KOUIDER M	COVERING OF THE VERTICES OF A GRAPH BY SMALL CYCLES	16 PAGES	10/2003